

M. Langenbruch

Mainx 1976

"Randwerte von Nulllösungen
hypoelliptischer Differentialoperatoren"

D i s s e r t a t i o n

zur Erlangung des Grades

"D o k t o r d e r N a t u r w i s s e n s c h a f t"

am Fachbereich Mathematik
der Johannes Gutenberg-Universität in Mainz

Michael Langenbruch
geb. in Simmerath/Eifel

Mainz 1976



Berichterstatter: Prof. Dr. H.G. Tillmann

Prof. Dr. D. Vogt

Prof. Dr. R. Meise

Tag der mündlichen Prüfung: 3.12.1976



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41555607_0072

Inhalt:

	Seite
Einleitung	I
Notationen und Konventionen.	V
I. Vorbereitungen	1
II. P-Funktionale.	12
III. Randwerte.	36
IV. Lösungen von homogenen und inhomogenen Differentialgleichungen.	51
V. Distributioneller Randwert	63
VI. Randwerte für $m \neq \text{Grad } Q$	81
Literatur.	97

Einleitung:

Die Randwerte holomorpher Funktionen wurden zunächst von H.G. Tillmann in mehreren Arbeiten unter distributionellen Gesichtspunkten untersucht. M. Sato führte dann 1959 den Bereich $H(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}) / H(\mathbb{C})$ der (formalen) Randwerte holomorpher Funktionen als Hyperfunktionen auf $\mathbb{R}$ ein. Er identifizierte also die holomorphen Funktionen auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ mit ihren Singularitäten auf $\mathbb{R}$. Die Ausdehnung auf mehrere Variable (und das Cauchy-Riemann-System) ergab allerdings eine wenig durchsichtige Theorie. 1967 entwickelte schließlich G. Bengel ([1]) eine Randwerttheorie für Nulllösungen elliptischer Differentialoperatoren. Hierzu erweiterte er einen elliptischen Operator $Q(D)$ mit positivem Hauptteil auf $\mathbb{R}^n$ zu einem Operator $P(D, D_t) = Q(D) + D_t^m$ ($m = \text{Grad } Q$) auf $\mathbb{R}^{n+1}$ und betrachtete den Raum $\mathcal{E}_P(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathbb{R}^n) / \mathcal{E}_P(\mathbb{R}^{n+1})$, wobei $\mathcal{E}_P(0)$ der Raum aller (C^∞) -Nulllösungen von $t_P(D)$ auf 0 ist. Dieser in gewissem Sinne eindimensionale Randwert ergab gerade das m -fache Produkt der Hyperfunktionen auf dem $\mathbb{R}^n$.

In der vorliegenden Arbeit sollen nun die (formalen) Randwerte von Nulllösungen hypoelliptischer Differentialoperatoren untersucht werden. Diese Operatorenklasse ist aus folgenden recht allgemeinen Überlegungen die größtmögliche: Sei $\mathcal{E} = \mathcal{E}_P(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathbb{R}^n) / \mathcal{E}_P(\mathbb{R}^{n+1})$

- (1) Es existiere auf $\mathcal{E}$ eine injektive lineare Abbildung i , deren Bild die distributionellen Nulllösungen von $Q(D)$ umfaßt.

- (2) i sei mit den Ableitungen in Richtung des $\mathbb{R}^n$ vertauschbar.
- (3) Lassen sich die beiden Teile u^+ und u^- einer Funktion $u \in \mathcal{E}_P(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathbb{R}^n)$ in eine Umgebung von $t = 0$ hinein zu C^∞ -Funktionen $\tilde{u}^+$ und $\tilde{u}^-$ fortsetzen, so gilt:

$$i u = \tilde{u}^+ \Big|_{\mathbb{R}^n} - \tilde{u}^- \Big|_{\mathbb{R}^n}$$

Dann muß Q hypoelliptisch sein. Ist nämlich f eine Nulllösung von $Q(D)$, so existiert $F \in \mathcal{E}$ mit $i F = f$. Aus $0 = Q(D)f = Q(D)(i F) = i(Q(D)F)$ folgt $Q(D)F = h \in \mathcal{E}_P(\mathbb{R}^{n+1})$.

Wir lösen nun das System
$$\begin{aligned} P(D)H &= 0 \\ Q(D)H &= -h \end{aligned}$$
, was nach [10]

in $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ möglich ist. $\tilde{F} := F + H$ gehört zur selben Äquivalenzklasse wie F und erfüllt $0 = Q(D)\tilde{F} = (-i \frac{\partial}{\partial t})^m \tilde{F}$.

Für alle x gehört also $F_x(t) = \tilde{F}(x, t)$ zum Kern von $(\frac{d}{dt})^m$ und ist damit ein Polynom vom Grad kleiner als m , d.h.

$\tilde{F}^\pm(x, t) = \sum_{i=0}^{m-1} a_i^\pm(x) t^i$. Mit $\tilde{F}^\pm$ ist auch $a_i^\pm$ unendlich oft differenzierbar. Wegen $0 = Q(D)\tilde{F}^\pm = \sum_{i=0}^{m-1} Q(D)a_i^\pm(x) t^i$ gehört $a_i^\pm$ zum Kern von $Q(D)$, und $f = i F = a_0^+ - a_0^-$. f ist also unendlich oft differenzierbar und Q hypoelliptisch.

Betrachtet man statt aller C^∞ -Nulllösungen von $P(D)$ den Kern von $P(D)$ in den Hyperfunktionen und bildet den entsprechenden Quotientenraum, so erhält man für beliebige Operatoren $P(D)$ gerade das m -fache Produkt der Hyperfunktionen auf dem $\mathbb{R}^n$, falls die Koeffizienten von P konstant sind (H. Komatsu/T. Kawai: Boundary Values of Hyperfunction Solutions of Linear Partial Differential Equations; Publ. RIMS, Kyoto Univ. 7 (1971/72), S. 95 - 104)).

III

Wir setzen zunächst voraus, daß $m = \text{Grad } Q$ ist. Nach einigen grundlegenden Definitionen und Sätzen in Kapitel I. definieren wir in Kapitel II. P-Funktionale für hypoelliptische Differentialoperatoren ähnlich wie in [1]. Dies entspricht dem Martineau'schen Zugang zur Theorie der Hyperfunktionen. Für semielliptische Operatoren lassen sich die P-Funktionale in einige Richtungen des $\mathbb{R}^n$ als Hyperfunktionen und in andere als Ultradistributionen auffassen. Sind die Nulllösungen von $P(D)$ in t -Richtung reell-analytisch, so lassen sich die Grundräume zur Definition der P-Funktionale vollständig auf dem $\mathbb{R}^n$ beschreiben, und für gleichstarke Polynome Q_i sind die P_i -Funktionale isomorphe Garben.

Im nächsten Kapitel wird die Isomorphie der P-Funktionale zu dem Raum $\mathcal{E}_{tP}(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathbb{R}^n) / \mathcal{E}_{tP}(\mathbb{R}^{n+1})$ der Randwerte von t_P bewiesen. Wir untersuchen, wann die Einschränkungabbildung $\mathcal{E}_{tP}(O_1 \setminus o_1) / \mathcal{E}_{tP}(O_1) \longrightarrow \mathcal{E}_{tP}(O_2 \setminus o_2) / \mathcal{E}_{tP}(O_2)$, $o_1 \supset o_2$, surjektiv ist.

Sodann betrachten wir homogene und inhomogene Differentialgleichungen im Bereich der P-Funktionale, insbesondere beweisen wir das Weyl'sche Lemma und einige Sätze über die Surjektivität von Differentialoperatoren.

Ab Kapitel V. lassen wir die Bedingung $m = \text{Grad } Q$ fallen. Hier gehen wir auf den distributionellen Randwertbegriff für Nulllösungen von $t_P(D)$ ein und beweisen die aus der Theorie der Randwerte holomorpher Funktionen bekannten Sätze: Ein distributioneller Randwert existiert genau für

die lokal langsam wachsenden Nullösungen von ${}^tP(D)$, und diese stimmen mit den distributionell auf $\mathbb{R}^{n+1}$ fortsetzbaren Nullösungen überein. Dieser Raum wird dann ähnlich wie in [18] so topologisiert, daß der distributionelle Randwert einen topologischen Homomorphismus auf $\prod_{i=0}^{m-1} D_b^i(\mathbb{R}^n)$ definiert.

Im Schlußkapitel wird die allgemeine Randwerttheorie für $m \neq \text{Grad } Q$ untersucht. Interessant ist vor allem der Fall $m > \text{Grad } Q$. Dieser Abschnitt bildet gewissermaßen den nicht quasianalytischen Teil der Randwerttheorie. Für semielliptische Operatoren sind die Randwerte topologisch isomorph zum m -fachen Produkt gewisser Ultradistributionsklassen.

Für die Anregung und Betreuung der Arbeit danke ich Herrn Prof. D. Vogt und Herrn Prof. H.G. Tillmann.

Notationen und Konventionen:

$$a^{\mathbf{r}\mathbf{a}} = a_1^{r_1 a_1} \dots a_n^{r_n a_n}, \quad |\mathbf{a}| = \sum_{j=1}^n a_j$$

$A_Q(x)$ siehe 1.1.

$C^\infty(o), \mathcal{E}(o)$ oft differenzierbare Funktionen auf o

$$D = -i\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial t}\right)$$

$$D^{\mathbf{a}} = (-i)^{|\mathbf{a}|} \frac{\partial^{a_1}}{\partial x_1^{a_1}} \dots \frac{\partial^{a_n}}{\partial x_n^{a_n}} \frac{\partial^{a_{n+1}}}{\partial t^{a_{n+1}}}$$

$$D_t = -i \frac{\partial}{\partial t}$$

$$D_x = -i\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$$

$D(o)$ Testfunktionen auf o

$D'(o)$ Distributionen auf o

δ_x Punktauswertung in x

$\mathcal{E}'_P(\mathbb{R}^n)$ siehe S. 14

$\mathcal{F}(o)$ siehe S. 15

$\mathcal{H}'$ siehe S. 15

$\mathbb{N}$ nicht negative ganze Zahlen

o offene Menge im $\mathbb{R}^n$

O offene Menge im $\mathbb{R}^{n+1}$

$$P(x, t) = Q(x) + it^m$$

Δ hypoelliptischer Differentialoperator auf $\mathbb{R}^n$ mit reellen konstanten Koeffizienten

S schnell fallende Funktionen

ϕ siehe S. 52

Π siehe S. 22

Im Text definierte Funktionenräume:

$$D(M_{(a)}, U, C), D(M_{(a)}, o) : \quad 4.1.$$

VI

$$D_P(\mathbb{R}^n) , D_P(M_g) : \quad 6.2.$$

$$\mathcal{E}(a^{ra}, o, C) , \mathcal{E}(a^{ra}, o) : \quad S. 6$$

$$\mathcal{E}(a^{ra}, K) : \quad S. 27$$

$$\mathcal{E}(M_{(a)}, o, C) , \mathcal{E}(M_{(a)}, o) , \mathcal{E}(M_{(a)}, K) : \quad 4.1.$$

$$E(Q(D), k; o, C) , E(Q(D), k; o) : \quad 2.6.$$

$$E(Q(D), k; K) : \quad S. 27$$

$$E(K) : \quad S. 21$$

$$\mathcal{E}_P(K) : \quad S. 7$$

$$\mathcal{E}_P(O) : \quad S. 1$$

$$\mathcal{E}_{s,k} , \mathcal{E}_s , \widetilde{\mathcal{E}}_{s,k} , \widetilde{\mathcal{E}}_s , \widetilde{\mathcal{E}}_{\epsilon_P, D'} : \quad 5.13.$$

$$\mathcal{E}_{\epsilon_P, D'} : \quad S. 63$$

$$H(K) , H(\Omega) : \quad S. 15$$

$$\mathcal{N}(K) : \quad S. 8$$

□ bezeichnet jeweils das Ende eines Beweises

I. Vorbereitungen

Sei $Q(x)$ ein hypoelliptisches Polynom mit reellen konstanten Koeffizienten vom Grad m auf dem $\mathbb{R}^n$.

Wir bezeichnen mit P immer die folgende Erweiterung von Q zu einem Polynom auf $\mathbb{R}^{n+1}$: $P(x,t) := Q(x) + it^m$.

Ist $Q(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und m gerade, so ist auch eine Erweiterung von Q zu $P(x,t) := Q(x) + t^m$ möglich.

In dieser Arbeit wird nur mit der ersten Form von P gerechnet. Alle Ergebnisse lassen sich jedoch leicht auf den Fall $P(x,t) = Q(x) + t^m$ übertragen.

P ist auch hypoelliptisch. Hierfür ist nur zu zeigen:

$$B(x,t) := \frac{(Q(x) + it^m)^{(a)}}{Q(x) + it^m} \rightarrow 0 \text{ für } (x,t) \rightarrow \infty, a \neq 0.$$

Enthält a Ableitungen nach x_j und t , so ist dies klar.

Gehört a zu $\mathbb{N}^n$, so gilt wegen $|Q(x) + it^m| \geq |Q(x)|$

(bzw. $|Q(x) + it^m| \geq |t|^m$):

$$|B(x,t)| \leq \left| \frac{Q^{(a)}(x)}{Q(x)} \right| \quad (\text{bzw. } |B(x,t)| \leq \frac{|Q^{(a)}(x)|}{|t|^m})$$

Die erste Ungleichung liefert das Ergebnis, falls

$|x| \rightarrow \infty$, die zweite, falls $|x|$ beschränkt ist und

$|t| \rightarrow \infty$. Analog verläuft die Rechnung, falls a nur nach t ableitet.

□

O bezeichne immer eine offene Menge im $\mathbb{R}^{n+1}$, o eine solche im $\mathbb{R}^n$. Ist $\mathcal{E}_P(O) := \{f \in D'(O) \mid P(D)f = 0\}$, so gilt also

$\mathcal{E}_P(O) \subset \mathcal{E}(O)$. Außerdem erfüllen die hohen Ableitungen der Funktionen aus $\mathcal{E}_P(O)$ auf jedem Kompaktum K in O

gewisse Abschätzungen. Interessant ist vor allem der

Fall, daß die Nulllösungen von $P(D)$ in t -Richtung analytisch sind. Hierfür soll nun eine notwendige und hinreichende Bedingung angegeben werden.

Da Q hypoelliptisch ist, gibt es einen minimalen Multi-index $r' \in \mathbb{N}^n$, sodaß alle Nulllösungen f von $Q(D)$, die in einer Umgebung von K' (kompakt im $\mathbb{R}^n$) definiert sind, die folgende Ungleichung erfüllen:

$$\bigvee_C \bigwedge_{\substack{a \in \mathbb{N}^n \\ x \in K'}} |D^a f(x)| \leq C^{|a|+1} a_1^{r'_1 a_1} \dots a_n^{r'_n a_n} =: C^{|a|+1} a^{r'} \quad (1)$$

1.1. Satz: Sei $A_Q(x) := \sum_{a \neq 0} \left| \frac{Q^{(a)}(x)}{Q(x)} \right| \frac{1}{|a|}$ für $Q(x) \neq 0$.

Die Nulllösungen von $P(D)$ erfüllen die Ungleichung (1)

mit $r = (r', 1)$ genau dann, wenn

$$|Q(x)|^{\frac{1}{m}} A_Q(x) \leq C < \infty \text{ für große } |x|. \quad (2)$$

Beweis: Sei $j = 1, \dots, n$; nach Theorem 4.4.3 und 4.4.4 in

[6] gilt $|x_j| \leq C(d_Q(x)+1)^{r'_j}$ für $x \in \mathbb{R}^n$,

falls $d_Q(x)$ den Abstand von $x \in \mathbb{R}^n$ zur (komplexen) Nullstellenfläche von Q bezeichnet. Dies ist nach Theorem 4.1.3

äquivalent zu der für große $|x_j|$ gültigen Abschätzung:

$$\left| \frac{Q^{(a)}(x)}{Q(x)} \right| \leq |x_j|^{-\frac{|a|}{r'_j}} \cdot C, \quad 0 \leq a \in \mathbb{N}^n$$

Damit folgt:
$$\left| \frac{P^{(a)}(x, t)}{P(x, t)} \right| \leq \left| \frac{Q^{(a)}(x)}{Q(x)} \right| \leq C |x_j|^{-\frac{|a|}{r'_j}}$$

für $a \in \mathbb{N}^{n+1}$, $a_t = 0$.

Sei nun $a_x = 0$, $a_t \neq 0$ und x_j groß aber fest:

$$\left| \frac{P^{(a)}(x, t)}{P(x, t)} \right| \leq m! \frac{|t|^{m-a}}{|t|^m} \leq m! |x_j|^{-\frac{|a|}{r'_j}}, \text{ falls } |t| \geq |x_j|^{\frac{1}{r'_j}}$$

Ist $|t| \leq |x_j|^{\frac{1}{r'_j}}$, so folgt:

$$\left| \frac{P^{(a)}(x, t)}{P(x, t)} \right| \leq m! \frac{|x_j|^{(m-a)\frac{1}{r'_j}}}{|Q(x)|} \leq C |x_j|^{-\frac{|a|}{r'_j}}$$

Die gewünschte Abschätzung gilt also für $0 \neq a \in \mathbb{N}^{n+1}$

und die Behauptung bezüglich x ist bewiesen.

Nun ist zu zeigen:
$$\left| \frac{P^{(a)}(x, t)}{P(x, t)} \right| \leq C |t|^{-|a|}.$$

Für $a_x=0$ ist dies klar. Sei $a_t=0$. $r_t=1$ ist dann

$$\text{äquivalent zu } \frac{|Q^{(a)}(x)| |t| |a|}{|Q(x)+it^m|} \leq C_1 < \infty \quad (3)$$

Gilt (2), so folgt wegen $(Q^2(x)+t^{2m})^m \gg C(Q(x))^{2(m-1)} t^{2m|a|}$:

$$\left| \frac{Q^{(a)}(x) t |a|}{Q(x)+it^m} \right|^m \leq \frac{1}{C} \frac{|Q^{(a)}(x)|^m}{|Q(x)|^{m-|a|}} = \frac{1}{C} \left(|Q(x)|^{\frac{1}{m}} \left| \frac{Q^{(a)}(x)}{Q(x)} \right|^{|a|} \right)^m \leq C_1$$

für große x . Für kleine x ist dies klar. Damit folgt $r_t=1$.

Andererseits folgt mit $|t|=|Q(x)|^{\frac{1}{m}}$ aus (3):

$$C_1 \geq \frac{|Q^{(a)}(x)| |Q(x)|^{\frac{|a|}{m}}}{|Q(x)+i|Q(x)|^{\frac{1}{m}}|a|} = \frac{|Q^{(a)}(x)|}{\sqrt{2} |Q(x)|^{\frac{m-|a|}{m}}}$$

und damit wie oben die Ungleichung (2). $\square$

Bedingung (2) läßt sich unter Verwendung von $d_Q(x)$ folgendermaßen beschreiben:

1.2. Bemerkung: Äquivalent zu (2) ist

$$|Q(x)|^{\frac{1}{m}} \leq C d_Q(x) \quad (\text{für große } x).$$

Beweis: " $\Leftarrow$ " $|Q(x)|^{\frac{1}{m}} A_Q(x) \leq C d_Q(x) \quad A_Q(x) \leq C_1$

" $\Rightarrow$ " Wegen $C_1 \leq d_Q(x) \quad A_Q(x)$ folgt

$$|Q(x)|^{\frac{1}{m}} A_Q(x) \leq C \leq \frac{C}{C_1} d_Q(x) A_Q(x)$$

Da die Summe $A_Q(x)$ für große x ungleich 0 ist, folgt

$$|Q(x)|^{\frac{1}{m}} \leq C d_Q(x).$$

$\square$

Da $|d_Q(x)| \leq C_1 |Q(x)|^{\frac{1}{m}}$, bedeutet (2), daß d_Q und $|Q|^{\frac{1}{m}}$

gleich stark sind, d.h. es existiert ein C , sodaß für

$$\text{alle } x \quad C^{-1} \leq \frac{d_Q(x)+1}{|Q(x)|^{\frac{1}{m}+1}} \leq C.$$

(2) wird übrigens auch von nicht hypoelliptischen Polynomen erfüllt; wie das Beispiel $Q(x,y):=(x-y)^2+1$ zeigt.

Zur Hypoelliptizität braucht man allerdings nur noch

$|Q(x)| \rightarrow \infty$ für $|x| \rightarrow \infty$ zu fordern, da dann

$$\frac{|Q^{(a)}(x)|}{|Q(x)|} \leq |Q(x)|^{\frac{1}{m}} C \rightarrow 0 \text{ für } |x| \rightarrow \infty.$$

Die anschauliche Bedingung gibt also 1.2. an, während (2) zur Rechnung mit konkret gegebenen Polynomen benutzt werden kann.

Wir wollen nun auf die Frage eingehen, welche hypoelliptischen Polynome (2) erfüllen. Eine wichtige Klasse sind die semielliptischen Polynome.

1.3. Definition: Sei $m' = (m_1, \dots, m_n)$ ein n -dimensionaler

Multiindex, $|\alpha : m'| := \sum_{j=1}^n \frac{\alpha_j}{m_j}$ und Q ein Polynom

mit $Q(x) = \sum_{|\alpha : m'| \leq 1} c_\alpha x^\alpha$. $Q_{m'}(x) := \sum_{|\alpha : m'| = 1} c_\alpha x^\alpha$

heißt verallgemeinerter Hauptteil von Q .

Q heißt semielliptisch, falls $Q_{m'}(x) \neq 0$ für $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$.

Für semielliptische Polynome hat der minimale Multiindex r in (1) folgende Gestalt: $r = \max_{1 \leq j \leq n} (m_j) (\frac{1}{m_1}, \dots, \frac{1}{m_n})$, falls m_j der Grad von Q in x_j ist. Wir erhalten nun:

1.4. Bemerkung: a) (2) wird von allen semielliptischen Polynomen erfüllt.

Beweis: Ist Q semielliptisch zum Multiindex m' , so ist

$P_{(m', m)}(x, t) = Q_{m'}(x) + it^m = 0$ nur für $(x, t) = 0$.

P ist also auch semielliptisch und hat denselben Grad.

Damit gilt $r_P = (r_Q, \frac{m}{m})$ und mit 1.1. folgt (2). $\square$

b) Sind Q_1 und Q_2 zwei Polynome auf dem $\mathbb{R}^n$, so gilt

$d_{Q_1 Q_2}(x) = \min(d_{Q_1}(x), d_{Q_2}(x))$, woraus sofort folgt,

daß das Produkt hypoelliptischer Polynome wieder hypoelliptisch ist.

Ist nun $Q_1 Q_2$ hypoelliptisch und hat die Eigenschaft (2),

so folgt

$$|Q_1(x)Q_2(x)| \leq C(d_{Q_1Q_2}(x))^{m_1+m_2} = C \min(d_{Q_1}^{m_1+m_2}(x), d_{Q_2}^{m_1+m_2}(x)),$$

d.h. $|Q_1(x)Q_2(x)| \leq C d_{Q_i}^{m_1+m_2}(x)$ für große x und $i = 1, 2$;

Wegen $d_{Q_i}^{m_i}(x) \leq C|Q_i(x)|$ folgt

$$|Q_2(x)| \leq \frac{|Q_1(x)Q_2(x)|}{d_{Q_1}^{m_1}(x)} \quad C_1 \leq C_2 d_{Q_1}^{m_2}(x) \leq C_3 |Q_1(x)|^{\frac{m_2}{m_1}}.$$

Ist speziell $m_1 = m_2$, so erhalten wir $|Q_1(x)| \leq C|Q_2(x)|$ und $|Q_2(x)| \leq C|Q_1(x)|$ für große x , d.h. die Q_i sind gleich stark. Dies zeigt, daß (2) nicht von allen hypoelliptischen Polynomen erfüllt wird, und es ist leicht, Gegenbeispiele anzugeben: $Q(x,y) = (y^4 + x^2)(x^4 + y^2)$ erfüllt (2) nicht und ist also auch nicht semielliptisch. $\square$

c) Bedingung (2) führt über den Bereich der semielliptischen Polynome hinaus: Sei $Q(x,y) = (x-y)^4 + (x+y)^2$, dann ist $Q_{(4,4)}(x,y) = (x-y)^4$; Q ist also nicht semielliptisch.

Da $Q = Q_1 \overline{Q_1}$ mit $Q_1(x,y) = (x-y)^2 + i(x+y)$ und Q_1 gleich stark wie $\overline{Q_1}$ ist, muß nur gezeigt werden, daß Q_1 (2) erfüllt. Dies folgt leicht. Die Bemerkung nach 1.2. zeigt, daß Q hypoelliptisch ist. $\square$

d) Q ist aus dem semielliptischen Polynom $Q_2(x,y) = x^4 + y^2$ durch Anwenden der nicht singulären Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ entstanden. Satz 2.10. zeigt mit Hilfe von 1.1., daß jedes Polynom dieser Art hypoelliptisch ist und (2) erfüllt. Das Polynom $Q_3(x,y,z) = x^4 y^4 + x^6 + y^6 + z^{12}$ erfüllt die Bedingung (2), wie eine längere, aber einfache Rechnung zeigt. Es entsteht jedoch nicht wie in c) aus einem

semielliptischen Polynom. Q_3 ist hypoelliptisch. $\square$

Sei $\mathcal{E}(a^{ra}, 0, C)$ der Raum aller Funktionen, die auf 0 der Abschätzung (1) genügen. Die Elemente von

$\mathcal{E}(a^{ra}, 0) := \text{proj}_{0 \in C} (\text{ind}_C \mathcal{E}(a^{ra}, 0_1, C))$ heißen ultradifferen-

zierbare Funktionen der Klasse a^{ra} auf 0 (vgl. 4.1.c)).

Nach Theorem 4.4.2. in [6] ist für die Nulllösungen f von $P(f)$ die Konstante C in (1) nur von K und 0 , nicht aber von f abhängig. Wir sind nun in der Lage, einige natürliche Topologien auf $\mathcal{E}_P(0)$ zu definieren.

1.5. Satz: Folgende Topologien stimmen auf $\mathcal{E}_P(0)$

überein: Die induzierte Topologie von

a) $C(0)$

b) $C^\infty(0)$

c) $\mathcal{E}(a^{ra}, 0)$

d) die durch $\|f\|_K = \sup_{\substack{(x,t) \in K \\ a \in a^{ra}}} |f(a)(x,t)|$ definierte Topologie

Beweis: Da die Räume in a), b) und d) metrisch sind, und die von ihnen induzierte Topologie stärker ist als die von $D'(0)$ induzierte, ist $\mathcal{E}_P(0)$ bezüglich dieser Topologien vollständig, also ein (F) -Raum. Nun ist die Identität d) $\rightarrow$ b) $\rightarrow$ a) stetig und surjektiv. Nach dem Satz von der offenen Abbildung stimmen damit diese Topologien überein. Die Einbettungen d) $\rightarrow$ c) sowie c) $\rightarrow$ a) sind ebenfalls stetig. Damit ist die Behauptung bewiesen. $\square$

In Kapitel IV. werden wir zeigen, daß gewisse Ultradistributionsklassen $D'(M_{(a)}, \mathbb{R}^n)$ (siehe 4.1.) für $Q(D)$ das Weylsche Lemma erfüllen (4.5.b)). Hieraus folgt, daß

$D'(M_{(a)} \cdot l^{cl}, 0)$, $c > 1$, das Weylsche Lemma für P erfüllt (Beweis über $P = \overline{P}$) und $\mathcal{E}_P(0)$ deshalb in der hiervon induzierten metrischen Topologie vollständig und sogar ein (FS)-Raum ist. Diese Topologie ist schwächer als die von $C(0)$ induzierte Topologie und stimmt also mit dieser auf $\mathcal{E}_P(0)$ überein. Die zwischen $D'(M_{(a)} \cdot l^{cl}, 0)$ und $C(0)$ liegende Topologie von $D'(0)$ erzeugt also ebenfalls dieselbe Topologie.

Sei K kompakt im $\mathbb{R}^{n+1}$. Wir definieren: $\mathcal{E}_P(K) := \bigcap_{O \supset K} \mathcal{E}_P(O)$

Wir können uns hierbei auf abzählbar viele Umgebungen beschränken, für die die Einschränkungabbildungen kompakt sind. Ist nämlich $O_1 \supset \supset O_2$, so definiert $\overline{O_2}$ eine Nullumgebung in $\mathcal{E}_P(O_1)$, deren Bild in $\mathcal{E}_P(O_2)$ beschränkt, also relativ-kompakt ist.

1.6. Bemerkung: Die Einschränkungabbildungen in $\mathcal{E}_P(K)$ sind im allgemeinen nicht injektiv. $\mathcal{E}_P(K)$ hat eine nicht separierte Topologie:

Sei $H = N^\perp$ eine charakteristische Hyperebene im $\mathbb{R}^{n+1}$.

Es existiert ein Punkt (x_0, t_0) in K , sodaß $K \subset M$, wobei $M := \{(x_0, t_0) + (x, t) \mid \langle (x, t), N \rangle \gg 0\}$. Nun gibt es eine Nulllösung f von $P(D)$, für die (x_0, t_0) zum Träger gehört, die aber auf $\hat{M}$ verschwindet.

$f_n(x, t) := f((x, t) + \frac{1}{n} N)$ hat seinen Träger in K und konvergiert in $\mathcal{E}_P(0)$ gegen f . Damit konvergiert f_n auch in $\mathcal{E}_P(K)$ gegen f . Nun ist $f \neq 0$ in $\mathcal{E}_P(K)$, während $f_n = 0$ in $\mathcal{E}_P(K)$ für beliebiges n ist. f liegt damit im Abschluß der 0 in $\mathcal{E}_P(K)$ und die Topologie von $\mathcal{E}_P(K)$ ist nicht hausdorffsch.

Wir bezeichnen mit $\mathcal{N}(K)$ den Kern der Topologie von $\mathcal{E}_P(K)$. Dann ist $\mathcal{E}_P(K)/\mathcal{N}(K)$ ein (DS)-Raum (Dual eines Frechet-Schwartz-Raumes, s. [8]), also insbesondere vollständig, reflexiv und (M)-Raum. Schneidet man nämlich den Kern $\mathcal{N}(K)$ schon in der Stufe $\mathcal{E}_P(O)$ weg, so entsteht ein kompaktes (vgl. 3.2.), injektives Spektrum aus (F)-Räumen, also ein (DS)-Raum $\tilde{\mathcal{E}}_P(K)$. Die Identität $i: \mathcal{E}_P(K) \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}_P(K)$ ist stetig. Da $\tilde{\mathcal{E}}_P(K)$ separiert ist, gilt $\mathcal{N}(K) \subset \text{Kern } i$. Da andererseits $\text{Kern } i \subset \mathcal{N}(K)$, ist $i: \mathcal{E}_P(K)/\mathcal{N}(K) \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}_P(K)$ stetig, injektiv und surjektiv. Sei $\mathcal{N}(O) := \{f \in \mathcal{E}_P(O) \mid if = 0\}$.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}_P(O) & \rightarrow & \mathcal{E}_P(K)/\mathcal{N}(K) \\ \downarrow g & & \uparrow h \\ & \mathcal{E}_P(O)/\mathcal{N}(O) & \end{array}$$

Das obige Diagramm zeigt, daß h stetig ist, weil g offen ist, damit ist $i^{-1}: \tilde{\mathcal{E}}_P(K) \rightarrow \mathcal{E}_P(K)/\mathcal{N}(K)$ stetig.

$\mathcal{E}_P(K)$ ist also ein nicht separierter (DS)-Raum.

□

Es folgt nun eine Verallgemeinerung der Köthe-Dualität für holomorphe Funktionen.

Sei $f \in \mathcal{E}_P(K)$ definiert auf $O \supset K$;

sei $w \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^{n+1})$ mit $\begin{cases} w \equiv 1 \text{ auf } O_1 \subset\subset O, O_1 \supset K \\ w \equiv 0 \text{ auf } O_2 \subset\subset \mathbb{C}^n, O_2 \supset O \end{cases} \quad (4)$

$\langle \cdot, \cdot \rangle_O$ bezeichne das Skalarprodukt zwischen $D(O)$ und $D'(O)$. Nun hat der folgende Ausdruck für $u \in \mathcal{E}_P(K)$ Sinn:

$$(f, u) := \langle P(D)(wf), u \rangle_{O \cap K}$$

Diese Bilinearform ermöglicht nun eine Darstellung von $\mathcal{E}'_P(K)$ als Funktionenraum, die der Dualität

$\langle H(K), H(K)/H(O) \rangle$ entspricht, wobei $H(O)$ die holomorphen Funktionen auf O bezeichnet und $H(K) = \varinjlim_{O \supset K} H(O)$ ist.

1.7. Satz: Sei $P(D)$ ein hypoelliptischer Differentialoperator auf dem $\mathbb{R}^{n+1}$

- a) Die obige Bilinearform ist getrennt stetig auf $\mathcal{E}_P(K) \times \mathcal{E}_{\epsilon_P}(K)$
- b) Sie hängt nicht von w ab
- c) $(f, u) = 0$ für alle $f \in \mathcal{E}_P(K)$ gilt genau dann, wenn $u \in \mathcal{E}_{\epsilon_P}(\mathbb{R}^{n+1})$
- d) Jede stetige Linearform auf $\mathcal{E}_P(K)$ läßt sich auf diese Weise als Funktion darstellen

Beweis: folgt wörtlich wie in [1].

□

Dieser Satz ermöglicht später die Identifizierung von P -Funktionalen (Kapitel II) und Randwerten (Kapitel III). Außerdem läßt sich nun für einige Mengen der Kern $\mathcal{N}(K)$ der Topologie von $\mathcal{E}_P(K)$ bestimmen.

1.8. Bemerkung: a) Sei $K = \overline{K}$ kompakt im $\mathbb{R}^n$ und $f \in \mathcal{N}(K)$

definiert auf $0 \supset K$. Dann ist $f \equiv 0$ auf $K \times (-\epsilon, \epsilon) \subset 0$ für beliebige $\epsilon \in \mathbb{N}^{n+1}$.

b) Sei B ein abgeschlossener Kreis im $\mathbb{R}^2$, dann gilt:

$$\mathcal{N}(B) = \{ f \in \mathcal{E}_P(B) \mid f^{(a)} \equiv 0 \text{ auf } B, a \in \mathbb{N}^3 \}$$

Beweis: a) Gehört f zu $\mathcal{N}(K)$, so muß f zum Kern der stetigen Linearformen $\phi_x^{(a)}$ ($x \in K$) gehören, da 0 separiert ist (vgl. S. 8). Damit ist $f \equiv 0$ auf K samt allen Ableitungen.

Ist $B \subset K$ ein kleiner Kreis, $B \times (-\epsilon, \epsilon) \subset 0$, so gehört

$$f_1 := \begin{cases} f & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \text{ zu } \mathcal{E}_P(B \times (-\epsilon, \epsilon)) \text{ und wegen Theorem 5.3.3}$$

in [6] ist $f_1 \equiv 0$ in $B \times (-\epsilon, \epsilon)$. f verschwindet damit auf $K \times (-\epsilon, \epsilon) \subset 0$.

b) Zunächst zeigen wir, daß jede Gerade mit nicht charakteristischem Richtungsvektor (bzgl. Q) Drehachse eines

offenen Kegels K mit folgender Eigenschaft ist:

Jede charakteristische Hyperebene, die $\bar{K}$ schneidet, schneidet auch K .

Da $Q_m(N_0) \neq 0$ ist, existiert eine ε -Kugel $B_\varepsilon(N_0)$ um N_0 , sodaß $Q_m(x) \neq 0$ ist für alle $x \in B_\varepsilon(N_0)$. Sei $K_\varepsilon(N_0)$ der Durchschnitt aller Halbräume H , für die gilt: $0 \in \partial H, N_0 \in H$, H hat eine Normale aus $B_\varepsilon(N_0)$. $K_\varepsilon(N_0)$ hat dann die gewünschte Eigenschaft.

Sei nun N_0 eine nicht charakteristische Normale (bzgl. Q) auf ∂B in x_0 . Verschiebt man den Kegel $K_\varepsilon(-N_0)$ um $x_0 + \delta N_0$, und nennt diesen $\tilde{K}$, so erfüllt für genügend kleine δ eine beschränkte Teilmenge Ω_2 von $\tilde{K} \setminus (-\delta, \delta)$ nach a) das Theorem 5.3.3 in [6] ($\Omega_1 = \Omega_2 \cap B \setminus (-\delta, \delta)$, für jeden charakteristischen Vektor N von P ist $N_t = 0$). f verschwindet also auf einer Umgebung von x_0 bzw. dem gegenüberliegenden Punkt, falls $f^{(a)} = 0$ auf B für $a \in \mathbb{N}^{n+1}$. Wählt man zu einer Umgebungsbasis $\{O_s\}$, $s \in \mathbb{N}$, s genügend groß, so zerfällt der Träger von f in O_s in zwei disjunkte Teile, die sich in Richtung N_0 verschieben lassen. Damit läßt sich f durch Funktionen annähern, die auf einer Umgebung von B verschwinden. Also gehört f zu $\mathcal{N}(B)$ (vgl. 1.6.).

□

Teil 1.8.b) läßt sich natürlich direkt mit dem Holmgren'schen Eindeutigkeitssatz beweisen, dessen Folgerung 5.3.3 ist. Da die Kegelbedingung (5) jedoch in Kapitel III wichtig ist, und im $\mathbb{R}^2$ die Argumentation anschaulicher wird, weil sie sich noch zeichnerisch nachvollziehen läßt, sollte sie schon hier benutzt werden.

1.9. Bemerkung: a) Der Beweis von 1.8.b) läßt sich auf alle Mengen K übertragen, bei denen der Träger von f in O_s "richtig zerfällt", falls $f^{(a)} \equiv 0$ auf K ist für alle $a \in \mathbb{N}^{n+1}$.

Er läßt sich z.B. anwenden, falls ∂K nur endlich viele Punkte enthält, die keine nicht-charakteristische Normale haben. Er ist jedoch gegen kleine Veränderungen von K anfällig. Während er bei einem Quadrat mit charakteristischen Seiten nicht benutzt werden kann, läßt er sich anwenden, sobald die Ecken des Quadrats durch nicht charakteristische Strecken abgeschnitten worden sind.

b) Die Voraussetzungen des Beweises von 1.8.b) haben nichts mit Konvexität bzw. Q -Konvexität zu tun: In a) haben wir gesehen, daß er nicht einmal für alle Quadrate brauchbar ist, obwohl sie konvex sind. Andererseits lassen sich Mengen finden, die nicht Q -konvex sind, wo 1.8.b) aber doch gilt. Ist z.B. x_1 einziger charakteristischer Vektor, so gibt das Viereck zu den Punkten $(1,1)$, $(1, -1)$, $(0,0)$, $(-1,0)$ ein Beispiel.

c) In 2.11. werden wir mit anderen Mitteln 1.8.b) für eine große Klasse von Operatoren und kompakten Mengen beweisen. Die Aussage von 1.8.b) ist gleichbedeutend damit, daß die Nulllösungen von $t_P(D)$ auf $(K$, die sich distributionell auf $\mathbb{R}^{n+1}$ fortsetzen lassen, dicht in $\mathcal{E}_P^1(K)$ liegen.

□

II. P-Funktionale

Wir kommen in diesem Kapitel zur Definition von P-Funktionalen. Hierbei ergeben sich einige Unterschiede zur Theorie der Hyperfunktionen. Jedoch zeigt sich . zumindest für semielliptische Polynome eine klare Analogie zur analytischen Theorie.

Bezeichnen wir das Bild von $\mathcal{E}_P(\mathbb{R}^{n+1})$ in $\mathcal{E}_P(K)$ wieder mit $\mathcal{E}_P(\mathbb{R}^{n+1})$ (obwohl die Abbildung keine Injektion ist), so gilt:

2.1. Hilfssatz: $\mathcal{E}_P(\mathbb{R}^{n+1})$ ist dicht in $\mathcal{E}_P(K)$.

Beweis: Jedes $f \in \mathcal{E}_P(K)$ ist auf einer Umgebung von K definiert. Wir zeigen, daß es eine Umgebungsbasis $\{O_S\}$ von K gibt, sodaß die Exponentiallösungen von P dicht in $\mathcal{E}_P(O_S)$ liegen (" O_S ist relativ P-konvex").

f läßt sich dann in $\mathcal{E}_P(O_S)$ und also auch in $\mathcal{E}_P(K)$ durch g aus $\mathcal{E}_P(\mathbb{R}^{n+1})$ beliebig annähern. Wir zeigen, daß für eine Umgebung o von K die Menge $O = o \times (-c, c)$, $c \in \mathbb{R}^+$, relativ P-konvex ist. Mengen dieser Form bilden natürlich eine Umgebungsbasis von K . Nach [6], Corollary 3.4.1 und Definition 3.5.1 ist zu zeigen:

Für $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^{n+1})$ mit $\text{Tr } ({}^tP(D)T) \subset K \subset O$ existiert ein $K' \subset O$ mit $\text{Tr } T \subset K'$ (K' nur abhängig von K).

Da K in O liegt, folgt $d(K, \partial O) = \varepsilon > 0$. Nun erfüllen $O_2 = \mathbb{R}^n \times (c - \frac{\varepsilon}{2}, \infty)$ und $O_1 = \mathbb{R}^n \times (b, \infty)$ die Voraussetzungen von [6], Theorem 5.3.3, falls $\text{Tr } T \subset \mathbb{R}^n \times (-b, b)$; wie schon einmal bemerkt, ist nämlich $N_t = 0$ für jeden charakteristischen Vektor N von P .

Es folgt: $\text{Tr } T \subset \mathbb{R}^n \times (-c + \frac{\varepsilon}{2}, c - \frac{\varepsilon}{2})$.

Gehört x zu o mit $d(x, \partial o) < \frac{\varepsilon}{2}$ und ist $B_{\varepsilon/4}(x)$ die $\varepsilon/4$ -Kugel um x , so erfüllen $O_2 = B_{\varepsilon/4}(x) \times \mathbb{R}$ und $O_1 = B_{\varepsilon/4}(x) \times (b, \infty)$ die Voraussetzungen des o.g. Theorems, und damit folgt die Behauptung mit $K' = \{(x, t) \mid d(x, \partial o) \geq \frac{\varepsilon}{2}, x \in o; |t| \leq c - \frac{\varepsilon}{2}\}$. $\square$

Mit Hilfssatz 2.1. können wir Elemente aus $\mathcal{E}_P^1(K)$ für verschiedene K identifizieren:

2.2. Definition: $T_i \in \mathcal{E}_P^1(K_i), K_i \subset \mathbb{R}^n, i=1,2$, heißen

äquivalent, falls $T_1|_{\mathcal{E}_P(\mathbb{R}^{n+1})} = T_2|_{\mathcal{E}_P(\mathbb{R}^{n+1})}$.

Die Äquivalenzklassen heißen P -Funktionale mit kompaktem Träger (auf dem $\mathbb{R}^n$).

2.3. Satz: a) Seien $O_1, O_2 \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $O_1 \cup O_2$ P -konvex,

dann ist die durch $(f_1, f_2) \rightarrow (f_1 - f_2)$

definierte Abbildung: $\mathcal{E}_P(O_1) \times \mathcal{E}_P(O_2) \rightarrow \mathcal{E}_P(O_1 \cap O_2)$

stetig, surjektiv und offen.

b) Sei T ein P -Funktional mit kompaktem Träger.

Dann existiert ein minimales K , für das T zu

$\mathcal{E}_P^1(K)$ gehört. Dieses K heißt Träger von T ($\text{Tr } T$).

Beweis: a) Die Abbildung ist natürlich stetig.

Die Surjektivität folgt wie in [7], Theorem 1.4.5,

wo nur benutzt wird, daß $O_1 \cup O_2$ P -konvex ist.

Da $\mathcal{E}_P(O_1)$ und $\mathcal{E}_P(O_1 \cap O_2)$ (F) -Räume sind, ist die Abbildung offen.

b) Seien $T_1 \in \mathcal{E}_P^1(K_1)$ und $T_2 \in \mathcal{E}_P^1(K_2)$ äquivalent und

$\{O_{is}\}$ eine Umgebungsbasis von K_i , die wie in 2.1.

gewählt ist.

Nun definiert $T_s(f_s) := T_{1s}(f_{1s}) - T_{2s}(f_{2s})$ eine Abbildung von $\mathcal{E}_P(O_{1s} \cap O_{2s})$ in $\mathbb{C}$. Hierbei sei $T_{is} = T_i|_{O_{is}}$, $i = 1, 2$

und $f_s = f_{1s} - f_{2s}$ nach a) gewählt.

Ist $f_{1s} - f_{2s} = 0$ auf $O_{1s} \cap O_{2s}$, so sind f_{1s} und f_{2s}

Einschränkungen einer Funktion $g \in \mathcal{E}_P(O_{1s} \cup O_{2s})$.

g läßt sich durch $g_1 \in \mathcal{E}_P(\mathbb{R}^{n+1})$ annähern und wegen der Äquivalenz von T_1 und T_2 gilt:

$$T_{1s}(f_{1s}) = T_{1s}(\lim g_1) = \lim T_{1s}(g_1) = \lim T_{2s}(g_1) = T_{2s}(f_{2s})$$

Also ist $T_s(f_s) = 0$ und T_s ist wohldefiniert. Die T_s sind stetig, da $(f_{1s}, f_{2s}) \rightarrow f_{1s} - f_{2s}$ offen ist, und mit dem Spektrum verträglich. Sie definieren also ein

$T \in \mathcal{E}'_P(K_1 \cap K_2)$, das zu T_i äquivalent ist. Damit können wir uns auf ineinanderliegende Kompakta K_s beschränken.

Sei $K = \bigcap_{s=1}^{\infty} K_s$ und $T_s \in \mathcal{E}'_P(K_s)$, $s = 1, \dots, \infty$, alle äquivalent. Sei $\{O_i\}$ eine Umgebungsbasis von K gemäß 2.1.

Für jedes i gibt es dann ein $s(i)$, sodaß $O_i \supset K_{s(i)}$;

Wir definieren $T'_i(f) := T_{s(i)}(f)$ für $f \in \mathcal{E}_P(O_i)$.

Da die T_s äquivalent sind, gilt

$$T'_i|_{O_1} = T_{s(i)}|_{O_1} = T_{s(1)} = T'_1 \text{ für } i \geq 1.$$

Damit definieren die T'_i ein $T' \in \mathcal{E}'_P(K)$, das zu den T_s äquivalent ist (vgl. [1], Satz 5).

□

Für zwei P -Funktionale mit kompaktem Träger gilt:

$$\text{Tr}(T_1 + T_2) \subset \text{Tr } T_1 \cup \text{Tr } T_2$$

$$\text{Tr}(cT) \subset \text{Tr } T, \quad c \in \mathbb{C}$$

Es sollen nun P -Funktionale mit beliebigem Träger definiert werden. Sei $\mathcal{E}'_P(\mathbb{R}^n)$ der (lineare) Raum der

P-Funktionale mit kompaktem Träger (im $\mathbb{R}^n$).

Ist $\mathcal{F}(o) := \{ T \in \mathcal{E}'_P(\mathbb{R}^n) \mid \text{Tr } T \cap o = \emptyset \}$, so bildet

$\left\{ \mathcal{E}'_P(\mathbb{R}^n) / \mathcal{F}(o) \right\}$ eine Praegarbe. Sei $\mathcal{E}_P$ die erzeugte

Garbe.

2.4. Definition: a) Der Raum der Schnitte von $\mathcal{E}_P$

über o heißt Raum der P-Funktionale (mit beliebigem Träger) auf o .

b) $\mathcal{E}_P$ heißt Garbe der Keime von P-Funktionalen.

Wir wollen nun einige Analogien und Unterschiede zur Definition der Hyperfunktionen auf dem $\mathbb{R}^n$ herleiten.

Hierbei benutzen wir einige Ergebnisse von Kapitel III.

Sei Ω offen in $\mathbb{C}^n$ und $H(\Omega)$ der Raum der holomorphen

Funktionen auf Ω . Für ein Kompaktum K im $\mathbb{R}^n$ sei

$H(K) := \bigcap_{\Omega \supset K} H(\Omega)$. Dies ist der $\mathcal{E}_P(K)$ entsprechende

Raum, $H(K)$ ist allerdings separiert. Da $H(\mathbb{C}^n)$ dicht in

$H(K)$ liegt, lassen sich die Elemente aus $H'(K)$ für ver-

schiedene K identifizieren. Dies führt zu den Hyperfunk-

tionen mit kompaktem Träger im $\mathbb{R}^n$. Die Existenz des Trä-

gers einer Hyperfunktion wird wie in 2.3. hergeleitet.

(vgl. [1]). Die Garbe der Hyperfunktionen wird wie in

2.4. von den Einschränkungen der Hyperfunktionen mit

kompaktem Träger erzeugt. Wir bezeichnen diese Praegarbe

mit $\mathcal{H}'$. $\mathcal{H}'$ weist nun einige Eigenschaften auf, die

$\left\{ \mathcal{E}'_P(\mathbb{R}^n) / \mathcal{F}(o) \right\}$ nicht mehr hat. Die Einschränkung von $\mathcal{H}'$

auf beschränkte Mengen ist nämlich eine Garbe.

Sei i die Einbettung von $\left\{ \mathcal{E}_P^1(\mathbb{R}^n) / \mathcal{F}(o) \right\}$ in die P-Funktionale. Sei T ein P-Funktional auf einer beschränkten offenen Menge o . Dann existiert für alle x eine offene Umgebung o_x in o , sodaß $T|_{o_x} = i(T_x)$ für ein T_x aus $\mathcal{E}_P^1(\mathbb{R}^n) / \mathcal{F}(o_x)$. Es folgt:

$$i(T_x|_{o_x \cap o_y}) = i(T_x)|_{o_x \cap o_y} = T|_{o_x \cap o_y} = i(T_y)|_{o_x \cap o_y} = i(T_y|_{o_x \cap o_y}). \text{ Da } i \text{ injektiv ist, folgt}$$

$T_x|_{o_x \cap o_y} = T_y|_{o_x \cap o_y}$. Wäre $\left\{ \mathcal{E}_P^1(\mathbb{R}^n) / \mathcal{F}(o) \right\}$ auf beschränkten Mengen eine Garbe, so würde ein $\tilde{T} \in \mathcal{E}_P^1(\mathbb{R}^n) / \mathcal{F}(o)$

existieren mit $\tilde{T}|_{o_x} = T_x$. Dann wäre $i\tilde{T} = T$ und i somit surjektiv und injektiv. Mithin wären die Schnittträume der Praegarbe und der erzeugten Garbe für beschränkte Mengen isomorph. Nun ist die Praegarbe von 2.4. welk, d.h. die Einschränkungabbildung von $\mathcal{E}_P^1(\mathbb{R}^n)$ nach $\mathcal{E}_P^1(\mathbb{R}^n) / \mathcal{F}(o)$ ist surjektiv. Damit wäre auch die erzeugte Garbe lokal (d.h. eingeschränkt auf beschränkte Mengen) welk, also welk. Dies ist nicht der Fall (3.10.a)). Somit ist die Praegarbe in 2.4. auf beschränkten Mengen keine Garbe. $\square$

Zum Nachweis der Garbeneigenschaft von $\mathcal{H}^1$ auf beschränkten Mengen muß folgendes gezeigt werden:

Sei $o = \bigcup_{s \in N} o_s$, $T_s \in H'(\overline{o_s})$ mit $T_s|_{o_s \cap o_{s'}} = T_{s'}|_{o_s \cap o_{s'}}$, dann existiert ein $T \in H'(\overline{o})$ mit $T|_{o_s} = T_s$ für alle s .

Damit man sich auf den Fall $\bar{o}_s \subset o_{s+1}$ beschränken kann, werden zunächst zwei Schnitte T_1 und T_2 aus $H'(\bar{o}_1)$ bzw. $H'(\bar{o}_2)$ mit $T_1|_{o_1 \cap o_2} = T_2|_{o_1 \cap o_2}$ zu einem Element T aus $H'(\bar{o}_1 \cup \bar{o}_2)$ verheftet, für das gilt: $T|_{o_i} = T_i$, $i = 1, 2$.

Dieser Heftprozeß läßt sich für P-Funktionale mit kompaktem Träger nicht mehr durchführen. Dies hat seinen eigentlichen Grund darin, daß die Vereinigung (tQ -)konvexer Mengen nicht mehr tQ -konvex sein muß.

Ist nämlich $K_1 = \square$, $K_2 = \square$, $K_1 \cup K_2 = \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array}$

und T ein P-Funktional auf $\widehat{K_1 \cup K_2}$, dann wird

$T|_{K_i}$ durch $T_i \in \mathcal{E}_P^1(K_i)$ dargestellt (3.8.). Ließe sich

nun ein T' aus $\mathcal{E}_P^1(K_1 \cup K_2)$ finden mit $T'|_{K_i} = T_i|_{K_i}$

(d.h. ließe sich der Heftprozeß durchführen), so wäre T'

ein P-Funktional mit kompaktem Träger, das T auf $\mathbb{R}^n$

fortsetzt. Mit 3.10.a) folgt nun, daß $\widehat{K_1 \cup K_2}$ tQ -konvex

sein müßte. Nach [6], Theorem 3.7.2., dürfen dann die

charakteristischen Geraden $K_1 \cup K_2$ nur in einem Inter-

vall schneiden. Die einzigen charakteristischen Vektoren

von tQ können mithin nur die Koordinatenachsen sein.

Leichtes Drehen des Beispiels schließt auch dies aus.

tQ hat somit keine charakteristischen Vektoren und ist

also elliptisch. Das Zusammenheften von P-Funktionalen

mit kompaktem Träger ist daher genau für elliptische Q

möglich (vgl. [1]), da sich im $\mathbb{R}^n$ analog mit n Mengen

schließen läßt.

□

Anschließend an den Heftprozeß wird T aus $H'(\bar{o})$ durch einen Grenzwert definiert (vgl. [16], S. 54). Hierzu ist erforderlich, daß $H'(\partial o)$ dicht in $H'(\bar{o} \setminus o_1)$ liegt für $\bar{o}_1 \subset o$. Setzt man eine solche Forderung für P-Funktionale voraus, so folgt, daß sich alle P-Funktionale von o auf R^n fortsetzen lassen (3.8.) und damit wiederum, daß o ${}^t\mathbb{Q}$ -konvex ist (3.10.a)). □

Bengel definiert in [1] P-Funktionale als Äquivalenzklassen lokal-endlicher Summen von P-Funktionalen mit kompaktem Träger. Ein solcher Ansatz ist im hypoelliptischen Fall nicht mehr möglich, da er den obigen Heftprozeß benutzt ([1], Satz 8.).

Für Hyperfunktionen stimmt der Ansatz 2.4. überein mit

$\frac{H'(\bar{o})}{H'(\partial o)}$. Jedes Element T aus $H'(K_1 \cup K_2)$ läßt sich

nämlich als $T = T_1 + T_2$ mit $T_i \in H'(K_i)$ schreiben. Ein solcher Zerlegungssatz ist auch zum Nachweis der Praegarben-eigenschaft dieses Ansatzes nötig. Er gilt für hypoelliptische P-Funktionale zwar auch bzgl. einer großen Klasse von Mengen (auch nicht ${}^t\mathbb{Q}$ -konvexen, vgl. 3.7.) jedoch nicht für beliebige Mengen K_i .

All dies zeigt, daß unser (Martineau'scher) Ansatz für hypoelliptische P-Funktionale nicht sehr handlich ist. Ein funktioneller Ansatz (Kapitel III., Randwerte) ist hier natürlicher. □

Wir wollen nun zeigen, daß die P-Funktionale in ein m -faches Produkt identischer Räume zerfallen. Hierzu

schränken wir die ersten m partiellen Ableitungen nach t von $f \in \mathcal{E}_P(0)$ auf $0 \cap \mathbb{R}^n$ ein und lösen anschließend das Cauchyproblem (6) mit den Daten $\frac{\partial^i}{\partial t^i} f(x, 0)$.

Um hierfür einen analytischen Ansatz in t -Richtung machen zu können, setzen wir voraus, daß Q die Bedingung (2) erfüllt.

Sei also $f \in \mathcal{E}_P(K)$ definiert auf $0 \supset K$. Für $0 \leq i \leq m-1$ sei $f_i(x) := \frac{\partial^i}{\partial t^i} f(x, 0)$, $x \in 0 := 0 \cap \mathbb{R}^n$.

Wir wollen nun das folgende Cauchyproblem lösen:

$$F_i(x, t) \in \mathcal{E}_P(O_1), O_1 \supset K$$

$$\frac{\partial^i}{\partial t^i} F_i|_{O_1} = f_i|_{O_1} \quad (6)$$

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k} F_i|_{O_1} = 0 \text{ für } i \neq k, 0 \leq i, k \leq m-1$$

Auf einer Umgebung O_1 von K , $O_1 \subset \subset 0$, gilt dann nach 1.1. und (1):

$$\sup_{\substack{l \in \mathbb{N} \\ x \in O_1}} \frac{|Q^{l+1}(D)f_i(x)|}{C^{l+1}(l+1)^{l+1}} = \sup_{\substack{l \in \mathbb{N} \\ x \in O_1}} \frac{|D_t^{l+1}f_i(x, 0)|}{C^{l+1}(l+1)^{l+1}} < \infty \quad (7)$$

Wir machen nun den folgenden Ansatz (vgl. [1], S. 386):

$$F_i(x, t) := \sum_{l=0}^{\infty} i^{l(m+1)} Q^{l+1}(D)f_i(x) \frac{t^{l+1}}{(l+1)!} \quad (8)$$

Zunächst ist die Konvergenz der Summe auf einer Umgebung von K nachzuweisen.

$$\begin{aligned} |F_i(x, t)| &\leq \sum_{l=0}^{\infty} |Q^{l+1}(D)f_i(x)| \frac{|t|^{l+1}}{(l+1)!} \leq \\ &\leq \sup_{\substack{l \in \mathbb{N} \\ x \in O_1}} \frac{|Q^{l+1}(D)f_i(x)|}{C^{l+1}(l+1)^{l+1}} \sum_{l=0}^{\infty} |4tC|^{l+1} \end{aligned}$$

Die Summe konvergiert also gleichmäßig auf $O_1 = o_1 \times (-\frac{1}{50}, \frac{1}{50})$.

Außerdem gilt: $\frac{\partial^i}{\partial t^i} F_i|_{o_1} = f_i|_{o_1}$ und $\frac{\partial^k}{\partial t^k} F_i|_{o_1} = 0$, $i \neq k$.

Wir haben nur noch nachzuweisen, daß F_i auf O_1 zum Kern von $P(D)$ gehört. Dies liefert die folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} P(D)F_i(x, t) &= \sum_{l=0}^{\infty} i^{l(m+1)} Q^{l+1}(D) f_i(x) \frac{t^{lm+i}}{(lm+i)!} + \\ &+ i \sum_{l=1}^{\infty} i^{l(m+1)} Q^l(D) f_i(x) (-i)^m \frac{t^{(l-1)m+i}}{((l-1)m+i)!} = \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} i^{l(m+1)} Q^{l+1}(D) f_i(x) \frac{t^{lm+i}}{(lm+i)!} (1 + i i^{m+1} (-i)^m) = 0 \end{aligned}$$

Sei $\phi_i(f)$ definiert durch $\phi_i(f) := \frac{\partial^i}{\partial t^i} f|_0$ und $\Pi_i(g)$ die

Lösung des Cauchyproblems (6) für g (falls existent)

sowie χ die Abbildung von $\mathcal{E}_P(O_1)$ nach $\mathcal{E}_P(K)$.

$\chi \circ \Pi_i \circ \phi_i$ ist als Abbildung von $\mathcal{E}_P(K)$ in sich wohl-

definiert: Sei $f_1 = \frac{\partial^i}{\partial t^i} f|_{o_1}$ und $f_2 = \frac{\partial^i}{\partial t^i} \tilde{f}|_{o_2}$, wobei

$f = \tilde{f}$ in $\mathcal{E}_P(K)$. f_1 und f_2 stimmen dann in einer Umge-

bung von $K \cap O_1 \cap O_2$ überein. Dasselbe gilt dann auch

für $\Pi_i(f_1)$ und $\Pi_i(f_2)$, da die Lösung des Cauchyproblems

eindeutig ist: also ist $\chi \circ \Pi_i \circ \phi_i(f) = \chi \circ \Pi_i \circ \phi_i(\tilde{f})$.

$\chi \circ \Pi_i \circ \phi_i$ ist eine Projektion von $\mathcal{E}_P(K)$ in sich.

Ihr Bildraum sei $E_i(K)$. Dann ist $E_i(K) \cap E_j(K) = 0$

für $i \neq k$ und $\sum_{i=0}^{m-1} \chi \circ \Pi_i \circ \phi_i$ ist eine surjektive Abbil-

dung von $\mathcal{E}_P(K)$ auf sich. Konvergiert eine Folge f_s in

$\mathcal{E}_P(0)$, so auch bzgl. der Halbnorm (7) mit einem festen $C(\overline{o}_1)$ (Satz 1.5.d). $\prod_i \phi_i(f_g)$ konvergiert also in

$$\mathcal{E}_P(o_1 \times (-\frac{1}{5C(\overline{o}_1)}, \frac{1}{5C(\overline{o}_1)})) , \text{ also auch in } \mathcal{E}_P(K).$$

Damit ist $\chi \circ \prod_i \phi_i$ stetig. Die Projektionen zerlegen also $\mathcal{E}_P(K)$ in das Produkt der Räume $E_i(K)$, und diese Zerlegung ist wegen der Stetigkeit der Projektionen topologisch.

Es gilt also: $\mathcal{E}_P(K)$ ist topologisch isomorph zu $\bigoplus_{i=0}^{m-1} E_i(K)$.

Wir haben noch zu zeigen, daß $E_i(K)$ isomorph $E_j(K)$ ist für alle j und i .

$$\sup_{\substack{l \in \mathbb{N} \\ x \in o_1}} \frac{|Q^l(D)f_i(x)|}{C^{l+m+j}(l+m+j)^{l+m+j}} \leq \sup_{\substack{l \in \mathbb{N} \\ x \in o_1}} \frac{|D^{l+m+i}f(x,0)|}{C^{l+m+i}(l+m+i)^{l+m+i}} C_1 \sup_{l \in \mathbb{N}} \left(\frac{l(m+1)}{lm} \right)^{l(m+1)}_{lm} \leq$$

$$\leq C_2 \sup_{\substack{l \in \mathbb{N} \\ x \in o_1}} \frac{|D^{l+m+i}f(x,0)|}{C^{l+m+i}(l+m+i)^{l+m+i}} < \infty, \text{ da } \frac{l(m+1)}{\sqrt{l}m} \frac{l(m+1)}{lm} < C_3$$

für alle l .

$\prod_j \phi_j(f)$ ist also definiert für $f \in E_i(K)$ und stellt einen topologischen Isomorphismus zwischen $E_i(K)$ und $E_j(K)$ dar. Sei $E(K)$ einer der Räume $E_i(K)$.

2.5. Satz: a) $\mathcal{E}_P(K)$ ist topologisch isomorph zu $\bigoplus_{i=0}^{m-1} E(K)$.

b) Die P -Funktionale zerfallen hierdurch in das m -fache Produkt einer Garbe.

Beweis: Es ist nur b) zu zeigen. Durch a) wird jedes Element aus $\mathcal{E}_P(K)$ eindeutig in m Teile zerlegt.

$\mathcal{E}_P(K)$ ist topologisch isomorph zu $\prod_{i=0}^{m-1} E_i(K)$.

Definition 2.2. führt auf $E'_1(K_j)$, $j=1,2$, eine Äquivalenzrelation ein. Sei $E'(\mathbb{R}^n)$ der lineare Raum der Äquivalenzklassen. Der Trägerbegriff in $E'(\mathbb{R}^n)$ sei durch 2.3.b) definiert. Ist $T = (T_0, \dots, T_{m-1})$, so gilt $\text{Tr } T = \bigcup_{i=0}^{m-1} \text{Tr } T_i$. Sei $F(o)$ analog zu 2.4. definiert.

$\left\{ \frac{E'(\mathbb{R}^n)}{F(o)} \right\}$ ist eine Praegarbe.

Die Zuordnung $T \longrightarrow (T_0, \dots, T_{m-1})$ definiert eine Ab-

bildung von $\left\{ \frac{\mathcal{E}'_P(\mathbb{R}^n)}{F(o)} \right\}$ nach $\prod_{i=0}^{m-1} \left\{ \frac{E'(\mathbb{R}^n)}{F(o)} \right\}$, die

wegen der Übereinstimmung der Träger wohldefiniert, injektiv und natürlich surjektiv ist. Sie läßt sich mit den Einschränkungsabbildungen vertauschen. Die obigen Praegarben sind also isomorph. Damit sind die P-Funktionale isomorph zum m -fachen Produkt der Garbe, die von

$\left\{ \frac{E'(\mathbb{R}^n)}{F(o)} \right\}$ erzeugt wird. $\square$

Sei $\Pi: \prod_{i=0}^{m-1} H(K) \longrightarrow \mathcal{E}_P(K)$ durch $\Pi(f_i) := \sum_{i=0}^{m-1} \chi \circ \pi_i(f_i)$

definiert. Diese Definition ist möglich, da die Cauchy'sche Ungleichung $|\mathcal{D}^{\alpha} f_i(z)| \leq \frac{\alpha!}{r^k} \sup_{z \in B_r} |f_i(z)|$ die Lösbarkeit

des Cauchyproblems (6) mit Hilfe des Ansatzes (8) garantiert (vgl. [1]; f ist definiert auf einer komplexen Umgebung Ω , B_r ist ein Polykreis mit Radius r in Ω).

Der expliziten Lösung (8) entnimmt man die Stetigkeit von Π .

Da Bild Π dicht in $\mathcal{E}_P(K)$ liegt (es enthält ja die Exponentiallösungen von $P(D)$), ist ${}^t\Pi$ eine Einbettung von $\mathcal{E}'_P(K)$ nach $\prod_{i=0}^{m-1} H'(K)$.

${}^t\Pi$ definiert also einen Praegarbenhomomorphismus von $\left\{ \mathcal{E}'_P(\mathbb{R}^n) / \mathcal{F}(0) \right\}$ nach $\prod_{i=0}^{m-1} \mathcal{H}'$. Dieser ist injektiv, falls sich

für Kugeln B der Träger von ${}^t\Pi_T$ ($T \in \mathcal{E}'_P(B)$) sich nicht auf ∂B zurückziehen kann, also z.B., falls die Trägerbegriffe für Hyperfunktionen und P -Funktionale übereinstimmen. Es ist mir nicht bekannt, ob dies der Fall ist. Der Homomorphismus ist nicht surjektiv, da sonst für Kugeln B ${}^t\Pi$ surjektiv auf $\prod_{i=0}^{m-1} H'(B)$ sein müßte.

Dann wäre Bild Π abgeschlossen in $\mathcal{E}'_P(B) / \mathcal{N}(B)$ ([1], Satz 1),

also wäre Π surjektiv. Sämtliche Nulllösungen von $P(D)$ wären dann analytisch auf einer Umgebung von B , also wäre Q elliptisch.

□

Wir kehren nun zu dem Raum $E(K)$ zurück, der die Theorie der P -Funktionale bestimmt, und setzen wieder voraus, daß Q die Bedingung (2) erfüllt. Zunächst war $E(K)$ das Bild der Projektionen $\chi \circ \Pi_i \circ \phi_i$; $E(K)$ läßt sich jedoch vollständig auf dem $\mathbb{R}^n$ beschreiben. Die entscheidende Rolle im Beweis von 2.5. spielte die Ungleichung (7). Dies gibt Anlaß zu der folgenden

2.6. Definition: Sei $E(Q(D), k; 0, C)$ der Raum aller Funktionen f , die die folgende Ungleichung erfüllen:

$$\sup_{\substack{l \in \mathbb{N} \\ x \in 0}} \frac{|Q^1(D)f(x)|}{C^{lm}(lm)^{klm}} < \infty \quad (m = \text{Grad } Q).$$

Sei $E(Q(D), k; 0) := \text{proj}_{0, C \subset 0} (\text{ind}_C E(Q(D), k; 0_1, C))$.

Den Raum $E(Q(D), k; o)$ können wir in folgendem Sinne als verallgemeinerte Gevrey-Klasse interpretieren (vgl. [19]): Die Rolle der Ableitungen $\frac{d^1}{dx^1}$ wird von dem Differentialpolynom $Q^1(D)$ übernommen. In diesem Sinne verallgemeinert $E(Q(D), 1; o)$ den Begriff der reell-analytischen Funktionen auf $\mathbb{R}$. Die Ungleichung (7) ist das Analogon der Cauchy'schen Ungleichung.

Sei $E(Q(D), k; K) := \text{ind}_{o \ni K} E(Q(D), k; o)$. Der folgende Satz ist eine Verallgemeinerung der Isomorphie zwischen dem induktiven Limes der reell-analytischen Funktionen auf einer Umgebung von K mit $H(K)$.

2.7. Satz: $E(K)$ ist topologisch isomorph zu $E(Q(D), 1; K)$.

Beweis: Zunächst liegt das Bild von ϕ_o in $E(Q(D), 1; K)$, da auf einer Umgebung O von K alle Nulllösungen von $P(D)$ die Ungleichung (7) erfüllen. ϕ_o ist injektiv und surjektiv, da $\pi_o = \phi_o^{-1}$ und π_o auf $E(Q(D), 1; K)$ definiert ist (vgl. 2.5.). ϕ_o und π_o sind stetig, was schon vor 2.5. bewiesen wurde. □

In völliger Analogie zur Theorie der Hyperfunktionen auf $\mathbb{R}$ läßt sich unser Vorgehen auch so beschreiben: Einen verallgemeinerten reell-analytischen Raum $E(Q(D), 1; o)$ setze man mit Hilfe der Ungleichung (7) auf offene Mengen im $\mathbb{R}^{n+1}$ analytisch in t -Richtung fort und bilde dann die entsprechenden Räume, die zur Definition der Hyperfunktionen verwendet wurden. Dies ergibt genau die P -Funktionale.

Die 1 in $E(Q(D), 1; o)$ wird durch die Ankoppelung mit $m = \text{Grad } Q$ bewirkt (wie bei $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$). Ist m größer als Grad Q , so erhalten wir den nicht quasianalytischen Teil der Theorie ($k > 1$, siehe Kapitel VI.).

$E(Q(D), 1; \mathbb{R}^n)$ ist dicht in $E(Q(D), 1; K)$, da $\phi_o(\mathcal{E}_P(\mathbb{R}^{n+1}))$ in $E(Q(D), 1; \mathbb{R}^n)$ enthalten ist. Wir können deshalb $\mathcal{E}_P^1(\mathbb{R}^n)$ mit $\prod_{i=0}^{m-1} E'(Q(D), 1; \mathbb{R}^n)$ identifizieren, wie man leicht nachweist.

2.8. Satz: Ist Q semielliptisch, so liefert $E(Q(D), 1; o)$ gerade die Klasse $\mathcal{E}(a^{r_{Q^a}}, o)$ samt deren Topologie.

Beweis: Zur Definition von $\mathcal{E}(a^{r_{Q^a}}, o)$ vgl. 1.5.

a) Gehört f zu $E(Q(D), 1; o, C)$, so konvergiert der Ansatz (8) und definiert eine Lösung F_o des Cauchyproblems (6) in einer Umgebung O von o . F_o gehört also zu $\mathcal{E}(a^{(r_Q, 1)^a}, C)$. $f = F_o|_o$ gehört damit zu $\mathcal{E}(a^{r_{Q^a}}, o)$. Zum Nachweis der Stetigkeit dieser Identität müssen wir über die Stufen in $\mathcal{E}(Q(D), 1; o)$ rechnen:

Konvergiert $\sup_{\substack{x \in \mathbb{K}_1^c \\ l \in \mathbb{N}}} \frac{|Q^l(D)f_s(x)|}{C^{lm} (lm)^{lm}}$ gegen 0, so auch $\prod_o(f_s)$

in $\mathcal{E}_P(\mathbb{K}_1^c \times (-\frac{1}{5C}, \frac{1}{5C}))$; $\prod_o(f_s)$ konvergiert also auch

bzgl. einer Halbnorm von 1.5.d) mit $K_2 \subset \mathbb{K}_1^c$ und damit in $\text{ind}_C \mathcal{E}(a^{r_{Q^a}}, \mathbb{K}_2^c, C)$. Unsere Abbildung ist also stetig von $\text{ind}_C E(Q(D), 1; o, C)$ nach $\text{ind}_C \mathcal{E}(a^{r_{Q^a}}, \mathbb{K}_2^c, C)$. Dies gilt dann auch nach Bildung der projektiven Limites.

b) Sei nun $\sup_{\substack{x \in K \\ a \in \mathbb{N}^n}} \frac{|D^a f(x)|}{|a|!} < \infty$ und $Q(x) = \sum_{|\beta: m'|\leq 1} c_\beta x^\beta$ (vgl. 1.3.)

Dann ist $r_Q = (\frac{m}{m_j})$ und $Q^1(x) = \sum_{|\beta: m'|\leq 1} c_\beta x^\beta$.

Damit gilt: $\sup_{\substack{x \in K \\ |\beta: m'|\leq 1}} \frac{|Q^1(D)f(x)|}{(1m)^{1m} C_1^{1m}} \leq C_2^1 \sup_{\substack{x \in K \\ |\beta: m'|\leq 1}} \frac{|D^\beta f(x)|}{(1m)^{1m} C_1^{1m}}$, (9)

wobei C_2 nur durch die Anzahl der Terme in Q und seine Koeffizienten bestimmt wird.

Wegen $\beta_j^{r_j} = \prod_{j=1}^n \beta_j^{\frac{m}{m_j}} \beta_j^{j_j} \leq (\sum_{j=1}^n \beta_j)^{\sum_{j=1}^n \frac{m}{m_j} \beta_j} \leq (1m)^{|\beta: m'|\leq 1} \leq (1m)^{1m}$

für $|\beta: m'|\leq 1$ folgt:

(9) ist kleiner gleich $\sup_{x \in K} \frac{|f^{(\beta)}(x)|}{(C_1/C_2)^{|\beta|} \beta^{\frac{r_Q}{\alpha}}}$, da o.E. $\frac{C_1}{C_2} \geq 1$.

Also: $\sup_{\substack{x \in K \\ |\beta: m'|\leq 1}} \frac{|Q^1(D)f(x)|}{(1m)^{1m} C_1^{1m}} \leq \sup_{\substack{x \in K \\ |\beta: m'|\leq 1}} \frac{|f^{(\beta)}(x)|}{(C_1/C_2)^{|\beta|} \beta^{\frac{r_Q}{\alpha}}}$.

Damit liegt jede Funktion aus $\mathcal{E}(a^{r_Q}, o)$ auch in

$E(Q(D), 1; o)$. Wie in a) rechnet man über die Stufen nach, daß diese Einbettung stetig ist. $\square$

Die Nulllösungen semielliptischer Operatoren sind in mindestens einer Richtung reell-analytisch ($m_j = \text{Grad } Q$ für mindestens ein j). r_Q zerfällt also in zwei Teile (evtl. nach Umordnung der Koordinaten): $r_Q = (r', r'')$ mit $r' = (r_1, \dots, r_k) = (1, \dots, 1)$ und $r'' = (r_{k+1}, \dots, r_n)$, alle r_j größer 1.

Sei $\mathcal{A}(K)$ der induktive Limes der auf einer Umgebung von K definierten reell-analytischen Funktionen versehen mit der Topologie von $H(K)$.

Sei $\mathcal{E}(a^{ra}, K) := \text{ind}_{o \triangleright K} \mathcal{E}(a^{ra}, o)$ und $N(a^{ra}, K)$ der Kern dieser Topologie.

2.9. Satz: Seien K' und K'' Quader in $\mathbb{R}^k$ bzw. $\mathbb{R}^{n-k}$.

$$\frac{\mathcal{E}(a^{rQ^a}, K' \times K'')}{N(a^{rQ^a}, K' \times K'')} \text{ ist topologisch iso-}$$

$$\text{morph zu } \mathcal{A}(K') \widehat{\otimes}_{\pi} \left(\frac{\mathcal{E}(a^{r''a}, K'')}{N(a^{r''a}, K'')} \right).$$

Beweis: a) Nach Satz 2.7. und 2.8. gilt $(K := K' \times K'')$:

$$\prod_{j=0}^{m-1} \frac{\mathcal{E}(a^{rQ^a}, K)}{N(a^{rQ^a}, K)} = \prod_{j=0}^{m-1} \frac{E(Q(D), 1; K)}{N(Q(D), 1; K)} =$$

$$= \frac{\mathcal{E}_P(K)}{\mathcal{N}(K)} . \text{ Da dies ein (DS)-Raum ist, gilt dies auch}$$

$$\text{für } \frac{\mathcal{E}(a^{rQ^a}, K)}{N(a^{rQ^a}, K)} .$$

$\mathcal{A}(K')$ ist ein nuklearer (DS)-Raum ([16], S.44).

Da Q semielliptisch ist, hat r'' die Form $(\frac{m}{m_{K+1}}, \dots, \frac{m}{m_n})$,

m größer als m_j für alle j . Sei Q semielliptisch zum

Multiindex $(m_{K+1}, \dots, m_n)$ und $P(x, t) := Q(x) + it^m$.

Dann ist $r_P = (r'', 1)$ und P hat wegen $m > \text{Grad } Q$ eine Form, die wir in Kapitel VI. näher betrachten werden.

$\frac{\mathcal{E}_P(K)}{\mathcal{N}(K)}$ ist wieder ein (DS)-Raum und die obige Iso-

morphiekette gilt entsprechend. Damit ist auch

$$\frac{\mathcal{E}(a^{r''a}, K'')}{N(a^{r''a}, K'')} \text{ ein (DS)-Raum.}$$

b) $\mathcal{E}(a^a, K')$ ist topologisch isomorph zu $\mathcal{A}(K')$. Algebraisch ist dies klar. Da beides (DS)-Räume sind, läßt sich der Graphensatz anwenden. Sei $f_g \longrightarrow f$ in $\mathcal{E}(a^a, K')$ und

$f_s \rightarrow g$ in $\mathcal{A}(K')$. Da aus beiden Topologien die Konvergenz auf K' folgt, stimmen f und g auf K' überein, also auch auf einer offenen Umgebung von K' und damit in $\mathcal{A}(K')$.

c) Sei $E_1 := \mathcal{A}(K')$, $E_2 := \mathcal{E}(a^{r''a}, K'') / N(a^{r''a}, K'')$

und $E_3 := \mathcal{E}(a^{r_Q a}, K) / N(a^{r_Q a}, K)$.

Da E_1 nuklear ist und sämtliche E_i vollständige (DS)-Räume sind, ist $E_1 \hat{\otimes}_\pi E_2 = E_1 \hat{\otimes}_E E_2 = L_e((E_2)'_{co}, E_1) = L_e((E_2)'_b, E_1)$ ein vollständiger (DS)-Raum ([5], S. 76).

d) $\tilde{l}_1: (f, g) \rightarrow (fg)$ ist eine stetige Abbildung von

$E_1 \hat{\otimes}_\pi E_2$ nach E_3 und definiert also eine stetige Abbildung

$l_1: E_1 \hat{\otimes}_\pi E_2 \rightarrow E_3$.

Für $f(x', x'') \in E_3$, definiert auf $o'x'o' \supset K'xK''$, sei (ψf) definiert durch $\langle T, \psi f \rangle(x') := \langle x', T, f(x', x'') \rangle$, $T \in E'_2$.

Die Menge $M := \left\{ \frac{D^a_x f(x', x'')}{C^a |a|^a} \mid x' \in o', a \in \mathbb{N}^k \right\} \subset E_2$ ist wegen

$$\sup_{\substack{x'' \in o'' \\ b \in \mathbb{N}^{n-k} \\ g \in M}} \frac{|D^b_g f(x'')|}{C^b |b|^b} = \sup_{\substack{x' \in o' \\ x'' \in o'' \\ (a,b) \in \mathbb{N}^n}} \frac{|D^{(a,b)} f(x', x'')|}{C^{(a,b)} |a|^a |b|^b} < \infty \text{ beschränkt}$$

in $\mathcal{E}(a^{r''a}, o'', C)$, also auch in E_2 . Damit gilt:

$$\sup_{\substack{x' \in o' \\ x'' \in o'' \\ a \in \mathbb{N}^k}} \frac{|D^a_x \langle T, \psi f \rangle(x')|}{C^a |a|^a} = \sup_{\substack{x' \in o' \\ x'' \in o'' \\ a \in \mathbb{N}^k}} \frac{|\langle x', T, D^a_x f(x', x'') \rangle|}{C^a |a|^a} =$$

$$= \sup_{g \in M} |\langle x', T, g(x'') \rangle| < \infty, \text{ da } M \text{ beschränkt in } E_2 \text{ und } T$$

stetig ist. ψf ist also eine Abbildung von E'_2 nach E_1 .

Konvergiert T_s gegen 0 in dem (FS)-Raum $(E_2)'_b$, so auch

gleichmäßig auf M , d.h. $\langle T_s, \psi f \rangle$ konvergiert gegen 0 in E_1 .

(ψf) ist also stetig.

Konvergiert f_s gegen 0 in E_3 , so konvergiert f_s gegen 0 in einem $\mathcal{E}(a^{r_Q a}, o' \times o'', C)$. Die Funktionen aus M konvergieren also gleichmäßig gegen 0 in E_2 . Damit konvergiert auch $\langle T, \psi f_s \rangle$ gegen 0 und (mit dem Satz von Banach-Steinhaus) folgt: $(\psi f_s) \rightarrow 0$ in $L_e((E_2)'_b, E_1)$. ψ ist daher folgenstetig und damit stetig von E_3 nach $L_e((E_2)'_b, E_1)$.

e) Sei $\psi f = 0$ in $L_e((E_2)'_b, E_1)$, dann ist $\langle \delta_{x''}, \psi f \rangle(x') = 0$ für $x'' \in K''$ und $x' \in o'$, d.h. $f(x', x'') = 0$ auf $o' \times K''$. Nach 2.11. gehört f dann zu $N(a^{r_Q a}, K)$, ψ ist also injektiv.

f) Wir betrachten das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} & E_1 \otimes_{\pi} E_2 & \\ l_1 \swarrow & & \nwarrow l_2^{-1} \\ E_3 & \xrightarrow{\psi} & L_e((E_2)'_b, E_1) \end{array}$$

wobei l_2 definiert ist durch $l_2(f(x') \otimes g(x'')) = \langle \cdot, g(x'') \rangle f(x')$

Sämtliche Abbildungen sind stetig, ψ ist injektiv.

Wir wollen zeigen, daß ψ surjektiv ist. Hierzu genügt es zu zeigen, daß $\psi \circ l_1 \circ l_2^{-1} = \text{id}$ und das auch nur auf einer totalen Teilmenge von $L_e((E_2)'_b, E_1)$. Dies folgt so:

$$\begin{aligned} \psi \circ l_1 \circ l_2^{-1}(l_2(f \otimes g)) &= \psi \circ l_1(f \otimes g) = \psi(f(x')g(x'')) = \\ &= \langle \cdot, g(x'')f(x') \rangle = \langle \cdot, g(x'') \rangle f(x') = l_2(f \otimes g). \end{aligned}$$

ψ ist damit stetig und bijektiv. Da E_3 und $L_e((E_2)'_b, E_1)$ (DS)-Räume sind, ist der Satz von der offenen Abbildung anwendbar und ψ ist ein topologischer Isomorphismus.

□

Dieser Satz erlaubt nun die folgende Interpretation:

P-Funktionale werden lokal durch Elemente aus

$$\prod_{j=0}^{m-1} (\alpha(K_j)) \otimes_{\pi} \frac{\mathcal{E}(a^{r^{j+1}a}, K^{j+1})}{N(a^{r^{j+1}a}, K^{j+1})}'_b \text{ dargestellt.}$$

Nun ist $(\mathcal{O}(K'))'_b \hat{\otimes}_\pi \mathcal{E}(a^{r''a}, K'') / N(a^{r''a}, K'')'_b$ isomorph zu $(\mathcal{O}(K'))'_b \hat{\otimes}_\pi (\mathcal{E}(a^{r''a}, K'') / N(a^{r''a}, K'')'_b)$ ([5], S. 76),

und der zweite Raum stellt gerade die Ultradistributionen der Klasse $a^{r''a}$ mit Träger in K'' dar (zum Beweis und den Definitionen siehe Kapitel IV., wo wir näher auf die Ultradistributionen eingehen).

Die semielliptischen P-Funktionale sind also lokal gerade das Tensorprodukt zwischen Hyperfunktionen mit kompaktem Träger (in die Richtungen, wo $m_j = \text{Grad } Q$ ist) und den Ultradistributionen der Klasse $a^{r''a}$ mit kompaktem Träger (in Richtungen, wo m_j kleiner als Grad Q ist). Damit sind für den semielliptischen Fall die P-Funktionale vollständig charakterisiert.

Dies ist eine genaue Verallgemeinerung des elliptischen Falles: Dort war $m_j = \text{Grad } Q$ für alle j , und man erhielt also in alle Richtungen die Hyperfunktionen. Sinkt m_j ab, so sind die P-Funktionale in diese Richtungen gerade durch Dualräume der entsprechenden ultradifferenzierbaren (nicht quasianalytischen) Funktionsklassen bestimmt.

Diese Vorgehensweise kann man auch umkehren: □

Gegeben sei eine Funktionsklasse a^{ra} mit $r = (\frac{b_j}{q_j}) \in \mathbb{Q}^n$ und mindestens einem $b_j = q_j$. Die Klasse enthält also keine Funktionen mit kompaktem Träger. Man wähle nun einen semielliptischen Operator Q mit $r_Q = r$. Eine Möglichkeit ist $Q(x) := \sum_{j=1}^n x_j^{\frac{2b_j}{b_j}} \frac{2b_j}{b_j} x_j$, wobei b das kleinste gemeinsame Vielfache der b_j ist. Dann ist $\text{Grad } Q = 2b$

und wir koppeln zu $P(x,t) := Q(x) + it^{2b}$. Q ist semielliptisch mit $r_Q = (\frac{2b}{m_j}) = (\frac{2b}{2b} \frac{b_j}{q_j}) = (\frac{b}{q_j})$.

Mit Hilfe des Cauchyproblems (6) setzt man die Funktionsklasse auf offene Mengen im $\mathbb{R}^{n+1}$ fort, bildet die entsprechenden Räume zur Theorie der Hyperfunktionen und ordnet den entstehenden P-Funktionalen eine Randwertklasse zu (Kapitel III.). Auf diese Weise hat man ein Tensorprodukt von Hyperfunktionen und Ultradistributionen (im obigen Sinne) durch Randwerte dargestellt.

Der semielliptische Fall mit $m = \text{Grad } Q$ paßt sich genau ein zwischen die elliptische Theorie (bzw. die Hyperfunktionen) und den semielliptischen Fall mit m größer als $\text{Grad } Q$, wo die P-Funktionale in a l l e Richtungen nicht quasianalytisch sind und genau ein Produkt von Ultradistributionsräumen darstellen (Kapitel VI.).

□

In 2.8. haben wir den Raum $E(Q(D), 1; 0)$ für semielliptisches Q wesentlich einfacher dargestellt. Dies ist auch für andere Operatoren möglich.

2.10. Satz: Sei A eine nichtsinguläre reelle Matrix.

- a) Ist Q hypoelliptisch und erfüllt die Bedingung (2), so gilt dies auch für $Q_A(x) := Q(Ax)$.
- b) $E(Q_A(D), 1; 0)$ stimmt mit dem Raum aller Funktionen überein, die der folgenden Abschätzung genügen:

$$\sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \in O_1}} \frac{|(AD)^a f(x)|}{C! |a|_A^{1/2} a} < \infty, \quad c_1 < c < c_0, \quad C \text{ abhängig von } c_1 \text{ und } f.$$

- c) Sei Q wie in 1.4.d); $E(Q(D), 1; 0)$ stimmt dann mit

dem Raum aller Funktionen überein, die auf $\mathcal{O}_1$ für eine Konstante C die folgende Abschätzung erfüllen: Sei $\min(k, l) = b_1$, $\max(k, l) = b_2$;

$$\sup_{\substack{k, l, j \\ (x, y, z) \in \mathcal{O}_1}} \frac{\left| \frac{\partial^k}{\partial x^k} \frac{\partial^l}{\partial y^l} \frac{\partial^j}{\partial z^j} f(x, y, z) \right|}{C^{k+l+j} b_1^{3b_1} (b_2 - b_1)^{2(b_2 - b_1)}} < \infty \quad (10)$$

Beweis: a) Durch $f \rightarrow f(t(A^{-1})x, t)$ gehen die Nulllösungen von $P(D)$ auf dem $\mathbb{R}^{n+1}$ über in die von $P_A(D) = Q_A(D) + i(-i \frac{\partial}{\partial t})^m$. Mit Theorem 4.4.3. in [6] folgt $(r_P)_A = 1$ und deshalb die Bedingung (2) für Q_A . Ebenso folgt, daß Q_A hypoelliptisch ist.

b) Wie in a) geht $E(Q_A(D), 1; 0)$ durch zweifache Transformation und unter Ausnutzung von 2.8. in den angegebenen Raum über.

c) Es gilt: $|(xy)|^4 \leq (1 + |Q(x)|) \leq (1 + d_P(x, t))^{12}$ und ebenso $|x| \leq (1 + d_P(x, t))^2$ und $|y| \leq (1 + d_P(x, t))^2$ sowie $|z| \leq (1 + d_P(x, t))$, da mit Q auch P die Bedingung (2) erfüllt und deshalb P und d_P gleich stark sind.

Hieraus folgt mit einer leichten Verallgemeinerung von Theorem 4.4.1. und 4.4.2. in [6], daß alle Nulllösungen von $P(D)$ auf $\mathcal{O}_1$ die angegebene Ungleichung erfüllen. Wie in 2.8. folgt hieraus: $E(Q(D), 1; 0)$ ist im gewünschten Raum enthalten.

$$Q^1(x, y, z) = \sum_{j=0}^1 \binom{1}{j} z^{12(1-j)} \sum_{s=0}^j \binom{j}{s} (xy)^{4s} (x^6 + y^6)^{j-s}$$

Die auftretenden Terme sind von der Form

$z^{12a_1} (xy)^{4a_2} (xy)^{6a_3} y^{6a_4}$ (oder ... x^{6a_4}), wobei $0 \leq a_1 \leq 1$ und $a_1 + a_2 + 2a_3 + a_4 = 1$. Für einen solchen Ausdruck läßt

sich der Nenner von (10) folgendermaßen abschätzen:

$$\begin{aligned} (12a_1)^{12a_1} b_1^{3b_1} (b_2-b_1)^{2(b_2-b_1)} &= (12a_1)^{12a_1} (4a_2+6a_3)^{3(4a_2+6a_3)} (6a_4)^{12a_4} \leq \\ &\leq (12a_1+4a_2+6a_3+6a_4)^{12a_1+12a_2+18a_3+12a_4} \leq (121)^{121}; \end{aligned}$$

$$\sup_{\substack{l \in \mathbb{N} \\ (x,y,z) \in o_1}} \frac{|Q^l(D)f(x,y,z)|}{C(121)^{(121)^{121}}} \leq \sup_{\substack{k,l,j \\ (x,y,z) \in o_1}} \frac{\left| \frac{\partial^k}{\partial x^k} \frac{\partial^l}{\partial y^l} \frac{\partial^j}{\partial z^j} f(x,y,z) \right|}{j_1^{k+l+j} b_1^{3b} (b_2-b_1)^{2(b_2-b_1)}}$$

Dies ergibt die Behauptung. $\square$

Für komplexe Matrizen gilt 2.10.a) im allgemeinen nicht mehr. Sei $Q(x,y) := (x^2+y^2)^2 = (x+iy)^2(x-iy)^2$ und $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ i & i \end{pmatrix}$

Dann ist Q elliptisch und $\det A = -2i$, also A nicht singulär. Aber $Q_A(x) = 16x^2y^2$ erfüllt weder (2) noch ist es hypoelliptisch. $\square$

Als weiteres Resultat des Cauchyproblems (6) läßt sich für semielliptische Operatoren der Kern $\mathcal{N}(K)$ der Topologie von $\mathcal{E}_p(K)$ für sternförmige K bestimmen. K heißt sternförmig, wenn es einen Mittelpunkt x_0 in K gibt, sodaß alle Geraden durch x_0 K in einem Intervall schneiden.

2.11. Satz: Sei $K = \overline{\overset{\circ}{K}}$ eine sternförmige kompakte Menge und Q semielliptisch. Dann besteht $\mathcal{N}(K)$ gerade aus den Funktionen, die auf K samt allen Ableitungen verschwinden.

Beweis: Wegen 2.7. und 2.8. ist nur zu zeigen:

$N(a^{ra}, K)$ ist der Raum aller Funktionen aus $\mathcal{E}(a^{ra}, K)$, deren Ableitungen auf K verschwinden.

Sei f eine solche Funktion. $f_c(x) := f(x_0 + c(x-x_0))$ hat

seinen Träger in $(K \cap O, \text{ falls } f \text{ auf } O \text{ definiert ist.}$

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{a \in \mathbb{N}^n \\ x \in O_1}} \frac{|D^a(f_c(x) - f(x))|}{C|a|_a^{ra}} &= \sup_{\substack{a \in \mathbb{N}^n \\ x \in O_1}} \frac{|c|a| (D^a f)(x_0 + (x-x_0)c) - D^a f(x)|}{C|a|_a^{ra}} \leq \\ &\leq \sup_{\substack{a \in \mathbb{N}^n \\ x \in O_1}} c|a| \frac{|(D^a f)(x_0 + (x-x_0)c) - D^a f(x)|}{C|a|_a^{ra}} + \\ &+ \sup_{\substack{|a| \geq 1 \\ x \in O_1}} (1 - c|a|) \frac{|D^a f(x)|}{C|a|_a^{ra}}, \quad K \subset O_1 \subset \bar{O}_1 \subset O \end{aligned} \quad (11)$$

Wir können o.E. annehmen, daß $\sup_{x \in O_1} \frac{|D^a f(x)|}{C|a|_a^{ra}}$ für wachsendes

$|a|$ eine Nullfolge bildet. Es läßt sich also ein 1 finden, sodaß für $|a|$ größer als 1 sämtliche auftretenden Suprema kleiner als ε sind. Die Funktionen $D^a f, |a| \leq 1$, sind auf O_1 gleichmäßig gleichgradig stetig. Das heißt, c läßt sich so nahe bei 1 wählen, daß die Suprema über die entsprechenden Funktionen im ersten Term von (11) ebenfalls kleiner als ε sind. Da c^1 gegen 1 konvergiert, läßt sich dies auch für den zweiten Term erreichen. f_c konvergiert also in $\mathcal{E}(a^{ra}, O_1, C)$ und damit auch in $\mathcal{E}(a^{ra}, K)$ gegen f . Somit gehört f zu $K(a^{ra}, K)$ (vgl. 1.3.b)). Die umgekehrte Inklusion ist klar. □

In 2.8. und 2.10. haben wir die Operatoren Q in ihre homogenen Bestandteile zerlegt. Der obige Satz läßt sich auf alle Operatoren ausdehnen, für die sich $E(Q(D), 1; K)$ durch Normabschätzungen mit homogenen Polynomen (wie in 2.10.) charakterisieren läßt.

Das Ende dieses Kapitels bildet ein Satz über die Isomorphie von P_i -Funktionalen für verschiedene Q_i .

2.12. Satz: Seien Q_1 und Q_2 gleichstarke hypoelliptische Polynome, die die Bedingung (2) erfüllen.

Dann sind die P_1 -Funktionale isomorphe Garben.

Beweis: Genügt Q_1 der Bedingung (2), so auch P_1 . Damit gilt für das gleichstarke Polynom Q_2 :

$$|Q_2(x)| \leq C(1+|Q_1(x)|) \leq C(1+|P_1(x,t)|) \leq C_1(1+d_{P_1}(x,t))^m$$

Die folgende Ungleichung stellt eine Verallgemeinerung von 4.4.1 in [6] dar (der Beweis stimmt wörtlich überein):

$$\bigwedge_{K \subset O} \bigvee_C f \in \mathcal{E}_{P_1}(O) \sup_{\substack{l \in \mathbb{N} \\ (x,t) \in K_l}} \frac{|Q_2^l(D)f(x,t)|}{C^{lm}(lm)^{lm}} \leq \quad (12)$$

$$\leq C_1 \sup_{\substack{a \in \mathbb{N}^n \\ |j| \leq n+1}} \int_{O_{\frac{1}{2}}} |P^{(a)}(D)D^j f(x,t)| dx dt \leq C_2 \sup_{\substack{(x,t) \in \bar{O}_{\frac{1}{2}} \\ |a| \leq m+n+1}} |L^a f(x,t)|$$

Hierbei ist O beschränkt, $K_l \subset O_{\frac{1}{2}} = \{(x,t) \in O \mid d(x, \partial O) > \delta\}$,

und C, C_1 sind unabhängig von f . Dasselbe gilt für

$\frac{\partial^j}{\partial t^j} f(x,t)$, $0 \leq j \leq m-1$. Damit läßt sich das Cauchyproblem (6) bzgl. P_2 für f_1 lösen und definiert eine injektive

Abbildung von $\mathcal{E}_{P_1}(K)$ nach $\mathcal{E}_{P_2}(K)$. Die obige Abschätzung

ergibt, daß f_s bzgl. der Halbnorm (12) konvergiert, falls

f_s in $\mathcal{E}_{P_1}(O)$ konvergiert. Damit konvergiert auch das

Bild von f_s in $\mathcal{E}_{P_2}(\bar{K} \times (-\frac{1}{50}, \frac{1}{50}))$, falls $K \subset \bar{K}_1$, und also

auch in $\mathcal{E}_{P_2}(K)$. Die Abbildung ist also stetig. Vertauschen von Q_1 und Q_2 ergibt, daß sie auch surjektiv und

offen ist. $\mathcal{E}_{P_1}(K)$ und $\mathcal{E}_{P_2}(K)$ sind also topologisch

isomorph. Da die Trägerbegriffe für P_1 -Funktionale übereinstimmen, führt dies zu einem Freagarbenisomorphismus zwischen

$\mathcal{E}'_{P_1}(\mathbb{R}^n)/\mathcal{F}_{P_1}(o)$ und $\mathcal{E}'_{P_2}(\mathbb{R}^n)/\mathcal{F}_{P_2}(o)$. Also sind die P_1 -Funktionale isomorphe Garben.

III. Randwerte

Analog zur Sato'schen Theorie der Hyperfunktionen auf dem $\mathbb{R}^1$ soll nun eine Darstellung der P-Funktionale durch Funktionen gegeben werden. Wir verwenden hierbei kurz Kohomologiegruppen mit Koeffizienten in einer Garbe. Die Darstellung der P-Funktionale als Randwerte ermöglicht insbesondere eine genauere Untersuchung der Frage, auf welche offenen Mengen o' sich alle P-Funktionale von o aus fortsetzen lassen. Einige Ergebnisse haben wir schon im Anschluß an 2.4. benutzt.

3.1. Definition: a) Sei X ein topologischer Raum und

Z lokalabgeschlossen in X , d.h. Z sei abgeschlossen in einer offenen Teilmenge O von X . Für eine Garbe $\mathcal{F}$ mit welcher Auflösung $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_0 \rightarrow \mathcal{F}_1 \rightarrow \dots$ sei $H_Z^i(O, \mathcal{F})$ definiert als Kohomologiegruppe von $\Gamma_Z(O, \mathcal{F}_0) \rightarrow \Gamma_Z(O, \mathcal{F}_1) \rightarrow \dots; \Gamma_Z(O, \mathcal{F}_i)$ bezeichnet hierbei die Schnitte von $\mathcal{F}_i$ über O mit Träger in Z .

b) Sei tP die Garbe der Keime von Lösungen der Gleichung ${}^tP(D)f = 0$.

c) Sei $\mathcal{H}_{\mathbb{R}^n}^i(\mathbb{R}^{n+1}, {}^tP)$ die durch das Garbendatum $O \rightarrow H_{\mathbb{R}^n}^i(O, {}^tP)$ definierte Garbe.

2.2. Satz: a) $\{ H_{\mathbb{R}^n}^0(O, {}^tP) \} = \mathcal{H}_{\mathbb{R}^n}^0(\mathbb{R}^{n+1}, {}^tP) = 0$

und $\{ H_{\mathbb{R}^n}^1(O, {}^tP) \}$ ist schon eine Garbe.

b) $H_{\mathbb{R}^n}^1(O, {}^tP) = \mathcal{E}_{\mathbb{R}^n}^1(O \setminus \mathbb{R}^n) / \mathcal{E}_{\mathbb{R}^n}^1(O')$ für eine

tP -konvexe offene Menge O' mit $O' \cap \mathbb{R}^n = O \cap \mathbb{R}^n$.

$H_{R^n \cap O}^1(O, t_P)$ heißt Randwert von t_P auf $O \cap R^n$.

Beweis: a) Es gilt $\Gamma(O, \mathcal{H}_{R^n}^0(R^{n+1}, t_P)) = \Gamma_{R^n \cap O}(O, t_P) = 0$, da keine Nulllösung von $t_P(D)$ existiert, die ihren Träger in $R^n \cap O$ hat. Die zweite Behauptung läßt sich explizit mit b) beweisen oder direkt mit einem kohomologischen Argument (vgl. [16]).

b) Für eine offene Teilmenge O von R^{n+1} haben wir folgende exakte Sequenz:

$$0 \rightarrow H_{R^n \cap O}^0(O, t_P) \rightarrow H^0(O, t_P) \rightarrow H^0(O \setminus R^n, t_P) \rightarrow \\ \rightarrow H_{R^n \cap O}^1(O, t_P) \rightarrow H^1(O, t_P) \rightarrow \dots$$

Außerdem ist $H_{R^n \cap O}^1(O, t_P) = H_{R^n \cap O'}^1(O', t_P)$,

falls $R^n \cap O' = R^n \cap O$ ist ([9], Theorem 1.1).

Da für eine t_P -konvexe Menge O' $H^1(O', t_P) = 0$ ist, folgt mit a):

$$0 \rightarrow H^0(O', t_P) \rightarrow H^0(O' \setminus R^n, t_P) \rightarrow H_{R^n \cap O'}^1(O', t_P) \rightarrow 0$$

ist exakt und also:

$$H_{R^n \cap O}^1(O, t_P) = \frac{H^0(O' \setminus R^n, t_P)}{H^0(O', t_P)} = \frac{\mathcal{E}_P(O' \setminus R^n)}{\mathcal{E}_P(O')}$$

O' läßt sich wie in 2.1. wählen.

□

Wir wollen als Nächstes die Isomorphie von P -Funktionalen und Randwerten zeigen. Für P -Funktionale mit kompaktem Träger liefert 1.7. die Isomorphie zu den "Randwerten mit kompakter Singularitätenmenge". Dies führt zu einer funktionellen Darstellung von $\left\{ \frac{\mathcal{E}_P^1(R^n)}{\mathcal{F}(O)} \right\}$.

Es ist dann nur zu zeigen, daß die Randwerte die hiervon erzeugte Garbe sind. Wir benötigen einige vorbereitende Hilfssätze:

3.3. Hilfssatz: Sei $K = \overline{K}$ kompakt in $\mathbb{R}^n$ und

$K_c = \{x \in K \mid d(x, \partial K) \leq c\}$. Ist für alle $c_1 > c_2$

die Einschränkungabbildung $\mathcal{E}_P(K_{c_1}) \rightarrow \mathcal{E}_P(K_{c_2})$

injektiv, so auch die Einschränkungabbildung

$$\mathcal{E}_P(K_{c_1}) / \mathcal{N}(K_{c_1}) \rightarrow \mathcal{E}_P(K_{c_2}) / \mathcal{N}(K_{c_2})$$

und $\mathcal{E}'_P(K_{c_2})$ ist dicht in $\mathcal{E}'_P(K_{c_1})$.

Beweis: Zunächst ist zu zeigen: Gehört f zu

$\mathcal{E}_P(K_{c_1}) \cap \mathcal{N}(K_{c_2})$, so auch zu $\mathcal{N}(K_{c_1})$.

Sei $o_{i,s} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, K_{c_i}) < \frac{1}{s}\}$, $i = 1, 2$, $s \in \mathbb{N}$.

Dann ist $O_{i,s} = o_{i,s} \times (-\frac{1}{s}, \frac{1}{s})$ eine Umgebungsbasis

von K_{c_i} . Sei $\mathcal{N}(O_{2,s}) = \{f \in \mathcal{E}_P(O_{1,s}) \mid f \in \mathcal{N}(K_{c_1})\}$.

a) $\mathcal{N}(O_{2,s})$ ist abgeschlossen in $\mathcal{E}_P(O_{2,s})$

Beweis: Sei $f_v \in \mathcal{N}(O_{2,s})$, $f_v \rightarrow f$ in $\mathcal{E}_P(O_{2,s})$.

Dann ist $f_v \equiv 0$ auf $K_{c_1} \times (-\frac{1}{s}, \frac{1}{s})$ (vgl. 1.8.a)).

$f_v|_{\cdot}$ läßt sich also auf $O_{1,s}$ durch 0 fortsetzen.

Ist die Fortsetzung f'_v , so gilt: $f_v - f'_v = 0$

in $\mathcal{E}_P(K_{c_3})$, $c_3 < c_2$, also verschwindet $f_v - f'_v$ in

$\mathcal{E}_P(K_{c_4})$ für beliebige $c_1 + \frac{1}{s} > c_4 > c_1$;

damit gilt $f_v - f'_v \equiv 0$ auf $O_{1,s}$. f_v konvergiert also

auch auf dem Rest von $O_{1,s}$ gegen f (fortgesetzt durch 0).

Somit gehört f zu $\mathcal{N}(K_{c_1})$, d.h. zu $\mathcal{N}(O_{2,s})$.

b) Sei $f|_{O_{2,s+1}} \in \mathcal{N}(O_{2,s+1})$ für $f \in \mathcal{E}_P(O_{1,s})$.

$f|_{O_{2,s+1}}$ läßt sich also zu $f' \in \mathcal{E}_{P(O_{1,s+1})}$ fortsetzen mit $f' \in \mathcal{N}(K_{c_1})$. Wie in a) folgt $f = f'$ auf $O_{1,s+1}$.

Damit gehört f zu $\mathcal{N}(K_{c_1})$, also zu $\mathcal{N}(O_{1,s})$.

Die Abbildung $i: \mathcal{E}_{P(O_{2,s})}/\mathcal{N}(O_{2,s}) \rightarrow \mathcal{E}_{P(O_{2,s+1})}/\mathcal{N}(O_{2,s+1})$ ist damit wohldefiniert und injektiv.

c) Das Spektrum $\left\{ \mathcal{E}_{P(O_{2,s})}/\mathcal{N}(O_{2,s}) \right\}$ ist kompakt:

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{E}_{P(O_{2,s})} & \xrightarrow{1} & \mathcal{E}_{P(O_{2,s+1})} & \xrightarrow{j} & \mathcal{E}_{P(O_{2,s+1})}/\mathcal{N}(O_{2,s+1}) \\ & \searrow u & & \nearrow i & \\ & \mathcal{E}_{P(O_{2,s})}/\mathcal{N}(O_{2,s}) & & & \end{array}$$

Da 1 kompakt ist, ist auch $j \circ 1$ kompakt. Diese Abbildung definiert i (Kern $j \circ 1 \supset \mathcal{N}(O_{2,s})$). Da u offen ist, ist i kompakt.

d) $\mathcal{E}_{P(O_{2,s})} \rightarrow \mathcal{E}_{P(O_{2,s})}/\mathcal{N}(O_{2,s}) \rightarrow \text{ind} \mathcal{E}_{P(O_{2,s})}/\mathcal{N}(O_{2,s})$ definiert eine stetige Abbildung

$$k: \mathcal{E}_{P(K_{c_2})} \rightarrow \text{ind}_j \mathcal{E}_{P(O_{2,s})}/\mathcal{N}(O_{2,s})$$

Der rechte induktive Limes ist aber hausdorffsch ($[s]$),

also gilt: $\mathcal{N}(K_{c_2}) \subset \text{Kern } k$. Gehört nun f zu

$\mathcal{N}(K_{c_2}) \cap \mathcal{E}_{P(O_{2,s})}$, so ist $f = 0$ in $\text{ind}_j \mathcal{E}_{P(O_{2,s})}/\mathcal{N}(O_{2,s})$; f liegt damit in $\mathcal{N}(O_{2,s})$, also in $\mathcal{N}(K_{c_1})$.

Die Einschränkungsabbildung $\mathcal{E}_{P(K_{c_1})}/\mathcal{N}(K_{c_1}) \rightarrow \mathcal{E}_{P(K_{c_2})}/\mathcal{N}(K_{c_2})$

ist folglich injektiv. Dies ist jedoch die Transponierte der Einbettung $\mathcal{E}_{P(K_{c_2})} \hookrightarrow \mathcal{E}_{P(K_{c_1})}$, die also dichtes Bild hat.

e) $\mathcal{E}_{P(K_{c_2})}/\mathcal{N}(K_{c_2})$ ist topologisch isomorph zu

$$\text{ind}_j \mathcal{E}_{P(O_{2,s})}/\mathcal{N}(O_{2,s})$$

□

3.4. Hilfssatz: Sei $o \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt.

Zu jedem $x \in \bar{o}$ existiere ein Kegel $K \subset o$ mit x als Spitze, sodaß keine charakteristische Ebene K nur in x schneidet. Dann erfüllt $\bar{o}$ die Voraussetzungen von 3.3.

Beweis: Sei $f = 0$ in $\mathcal{E}_P(\bar{o}_{c_2})$, also $f = 0$ in $\bar{o}_{c_2} \times (-\frac{1}{s}, \frac{1}{s})$ und definiert in $o_{1,s}$ (ohne Einschränkung).

Zu $x \in o_{1,s} \setminus o_{2,s}$ läßt sich dann ein Kegel K finden, der den inneren Rand von $o_{1,s}$ nicht berührt, x als inneren Punkt hat und durch Verschieben eines Kegels in der Voraussetzung entsteht. Auf $K \times (-\frac{1}{s}, \frac{1}{s})$ ist f überall definiert (falls man es durch 0 fortsetzt) und ist dort eine Nulllösung von $t_P(D)$. Mit Theorem 5.3.3 in [6] folgt, daß f auf $K \times (-\frac{1}{s}, \frac{1}{s})$ verschwindet. Dies ergibt die Behauptung (vgl. 1.8.b)).

□

3.5. Hilfssatz: a) Ist $n = 2$, so erfüllen alle t_Q -konvexen Mengen die Bedingung von 3.4.

b) Alle beschränkten konvexen Mengen erfüllen 3.4.

Beweis: a) siehe [6], Theorem 3.7.2

b) Sei o beschränkt und konvex, $x \in \bar{o}$. Dann existiert eine Hyperebene H , die x und $\bar{o}$ trennt. Sie kann ohne Einschränkung als nicht charakteristisch angenommen werden. Im $H^\perp = v$ läßt sich nach dem Beweis von 1.8.b) ein Kegel konstruieren, den keine charakteristische Ebene nur in x schneidet. Dieser trifft o nicht.

□

3.6. Satz: K erfülle die Voraussetzungen von 3.3.

- a) $\mathcal{E}_P^1(\partial K)$ ist dicht in $\mathcal{E}_P^1(K_c)$
 b) Ist $K \subset \bar{K}_1 \subset K_1$ kompakt und $T \in \mathcal{E}_P^1(K_1)$, so lassen sich $T_1 \in \mathcal{E}_P^1(\overline{K_1 \setminus K})$ und $T_2 \in \mathcal{E}_P^1(K)$ finden, sodaß $T = T_1 + T_2$.

Beweis: a) Sei $K_s = K_{\frac{s}{s}}$ und $f \in \mathcal{E}_P^1(K_1)$. Sei M_s eine kompakte Ausschöpfung von $\bigcup_{n=1}^{\infty} \partial K$ derart, daß $M_s \subset \overset{\circ}{M}_{s+1}$ und $M_s \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} K_s$. M_1 ist frei wählbar.

Zu $\delta > 0$ läßt sich nun sukzessive eine Folge $f_s \in \mathcal{E}_P^1(K_s)$ finden, sodaß $\|f_s - f_{s+1}\|_{M_s} < \frac{\delta}{2^s}$.

Hierbei ist $\|f\|_{M_s} = \inf_{g \in \mathcal{E}_P^1(\mathbb{R}^{n+1})} \|f - g\|_{M_s}$ eine Halbnorm in $\mathcal{E}_P^1(K_s)$.

$\{f_s \mid s > i\}$ ist eine Cauchyfolge in $\mathcal{E}_P^1(K_i)$:

$$\|f_s - f_1\|_{M_i} \leq \|f_s - f_1\|_{M_i} \leq \sum_{l=s}^{i-1} \|f_l - f_{l+1}\|_{M_i} \leq$$

$$\leq \delta \sum_{l=s}^{\infty} \frac{1}{2^l} < \tilde{\delta} \text{ für beliebige } \tilde{\delta}, \text{ falls } s, l > i, i > 0,$$

genügend groß und $f \in K_i$. $\{f_s\}$ konvergiert also in $\mathcal{E}_P^1(K_i)$.

gegen F_s . Da aber $F_s|_{(K_{s-1})} = F_{s-1}$, definiert $\{F_s\}$

eine Funktion $F \in \mathcal{E}_P^1(\partial K)$. Es gilt:

$$\|f - F\|_{M_1} \leq \|f - f_1\|_{M_1} + \|f_1 - F\|_{M_1} \leq \delta \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{2^l} + \delta \leq \delta$$

für genügend großes s .

Wir haben also zu einer beliebigen Halbnorm p in $\mathcal{E}_P^1(K_c)$

und beliebigem $f \in \mathcal{E}_P^1(K_c)$ sowie $\delta > 0$ eine Funktion

$F \in \mathcal{E}_P^1(\partial K)$ konstruiert, die $p(f - F) < \delta$ erfüllt,

damit folgt a).

b) Da $\mathcal{E}_P^1(\overline{K \setminus K_1})$ und $\mathcal{E}_P^1(K)$ (FS)-Räume sind, ist zu zeigen:

Die zu $(T_1, T_2) \rightarrow T_1 + T_2$ transponierte Abbildung ist injektiv und hat abgeschlossenes Bild, d.h. die Einschränkungabbildung:

$$\mathcal{E}_P(K_1) / \mathcal{N}(K_1) \rightarrow \mathcal{E}_P(\overline{K_1 \setminus K}) / \mathcal{N}(\overline{K_1 \setminus K}) \times \mathcal{E}_P(K) / \mathcal{N}(K)$$

hat diese Eigenschaft ([1], Satz 1).

Nun gehört aber f genau dann zu $\mathcal{N}(\overline{K_1 \setminus K})$, wenn es zu $\mathcal{N}(K_1)$ gehört. Der Beweis hierfür läuft genau wie in 3.3. Damit ist die Einschränkung injektiv.

Sei nun $f_v|_{\overline{K_1 \setminus K}}$ konvergent gegen g , $f_v|_K$ konvergent gegen h , dann ist $g|_{\partial K} - h|_{\partial K} \in \mathcal{N}(\partial K)$.

Liest man die Aussage von 3.6.a) transponiert, so folgt $v = (g - h)|_{\partial K} \in \mathcal{N}(K_c)$, falls man v durch 0 fortsetzt. Also setzt $g - h$ von $K \times (-c, c)$ aus fort. Die so definierte Funktion F unterscheidet sich von h nur durch v , d.h.

$f_v|_K \rightarrow F|_K$ und von g überhaupt nicht, also $f_v|_{\overline{K_1 \setminus K}} \rightarrow F|_{\overline{K_1 \setminus K}}$. Damit ist das Bild der Einschränkung abgeschlossen.

□

3.6.b) ist zum Nachweis der Isomorphie von P -Funktionalen und Randwerten nicht unbedingt nötig. Auf die Bedeutung dieses Zerlegungssatzes für die Definition von P -Funktionalen wurde schon im Anschluß an 2.4. hingewiesen.

3.7. Bemerkung: 3.6.b) gilt auch für einige nicht U_Q -konvexe K . Sei z.B. $(1,0)$ und $(0,1)$ nicht charakteristisch, dann gilt 3.6.b) auch für falls $Q(2)$ erfüllt.



Beweis: Gehört f zu $\mathcal{N}(\partial K)$, so ist $\frac{\partial^j}{\partial t^j} f(x, 0) = 0$ für $x \in \partial K$ und $j \in \mathbb{N}$. Damit ist $f(x, t) \equiv 0$ für $x \in \partial K$, da f analytisch in t ist. Dasselbe gilt für $Df(x, t)$, falls D beliebig nach x oder y differenziert. Damit zerfällt f in zwei Teile f_1 und f_2 mit Träger $f_1 \subset K \times (-c, c)$ und Träger $f_2 \subset \overline{K} \times \{0\}$, wobei f_1 zu $\mathcal{N}(K \setminus \overline{K})$ und f_2 zu $\mathcal{N}(K)$ gehört (Beweis wie in 1.8.). Mit leichten Modifizierungen läßt sich nun der Beweis wie in 3.6.b) führen.

□

Wir betrachten nun $G(o) := \{f|_o \mid f \text{ Randwert mit kompakter Singularitätenmenge}\} \subset H_0^1(o, \mathbb{R}^n)$. Hierbei ist

$|_o$ die Einschränkung von f als Randwert, d.h. die Einschränkung: $\mathcal{E}_P(o_1 \setminus o_1) / \mathcal{E}_P(o_1) \rightarrow \mathcal{E}_P(o) / \mathcal{E}_P(o)$

für $o_1 > o$. $\{G(o)\}$ ist eine Teilpraegarbe der Randwertgarbe. Durch Satz 1.7. wird $\mathcal{E}_P'(K)$ mit den Randwerten identifiziert, deren Singularitätenmenge in K liegt.

Der Träger von T als P -Funktional und die Singularitätenmenge des zugeordneten Randwertes stimmen hierbei überein.

Nennen wir den Isomorphismus in 1.6. i, so wird durch

$i_o [T]_o := (i T)|_o$ eine lineare Abbildung

$i_o: \mathcal{E}_P'(\mathbb{R}^n) / \mathcal{F}(o) \rightarrow G(o)$ definiert ($[T]_o$ bezeichnet die Äquivalenzklasse von T in $\mathcal{E}_P'(\mathbb{R}^n) / \mathcal{F}(o)$).

i_o ist injektiv und surjektiv. Damit i_o ein Praegarbenisomorphismus ist, müssen wir zeigen:

$$i_{o_2}([T]_o|_{o_2}) = (i_{o_1}[T]_{o_1})|_{o_2} \quad \mathcal{E}_P'(\mathbb{R}^n) / \mathcal{F}(o_2)$$

$$i_{o_2}([T]_{o_1}|_{o_2}) = i_{o_1}([T]_{o_1})|_{o_2} \quad \mathcal{E}_P'(\mathbb{R}^n) / \mathcal{F}(o_2)$$

$i_{o_1}[T]_{o_1}|_{o_2}$ Die beiden Praegarben sind also isomorph.

Um die Isomorphie von F -Funktionalen und Randwerten zu zeigen, genügt es zu beweisen, daß jeder Randwert lokal die Einschränkung einer Funktion mit kompakter Singularitätenmenge ist, da dann die Randwerte die von $\{G(o)\}$ erzeugte Garbe bilden. Dies liefert der folgende Satz:

3.8. Satz: Erfüllt o die Voraussetzung von 3.4. oder 3.5., so läßt sich jeder Randwert auf o zu einem Randwert auf $\mathbb{R}^n$ mit Träger in $\bar{o}$ fortsetzen.

Beweis: Sei $f \in \mathcal{E}_{\text{tp}}(O \setminus o)$, o in O abgeschlossen.

Sei $\varphi \in C^\infty(O)$ eine Funktion, die auf einer offenen, tp -konvexen Menge $O_1 \subset O$ ($O_1 \cap \mathbb{R}^n = o$) identisch gleich 1 ist und außerhalb einer ebensolchen (größeren) Menge $O_2 \subset O$ verschwindet.

$\text{tp}(D)(f\varphi) =: g$ ist eine Funktion aus $C^\infty(\bigcup_{\mathbb{R}^n} \partial o)$, die in zwei Teile g^+ und g^- zerfällt.

Sei $O^+ = \left[\{(x, t) \mid x \in \partial o, t \in \mathbb{R}^- \cup \{0\}\} \right]$ (analog O^-).

Dann ist O^+ (bzw. O^-) tp -konvex (Beweis wie in 2.1.)

und also existieren h^+ bzw. h^- mit $\text{tp}(D)h^+ = -g^+$ auf O^+ (bzw. O^-).

Sei $h = \begin{cases} h^+ & t > 0 \\ h^- & t < 0 \end{cases}$, dann ist $\text{tp}(D)h = -g + T_1 + T_2$,

wobei T_1 und T_2 zu $D(\bigcup_{\mathbb{R}^n} \partial o)$ gehören und von o bzw. $\bigcup_{\mathbb{R}^n} \bar{o}$ getragen werden.

Nun läßt sich $\text{tp}(D)G = -T_1$ auf $\bigcup \partial o$ lösen:

Sei K_S eine kompakte Ausschöpfung von o mit $K_S \subset \overset{\square}{K}_{S+1}$ und

φ_S eine Folge von Funktionen aus $D(o)$ mit $\varphi_S \equiv 1$ auf K_S .

Sei K'_S eine kompakte Ausschöpfung von $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \partial o$ mit

$K'_S \cap o \subset K_S$ ($K'_S \subset \overset{\square}{K}'_{S+1}$).

Sei G_1 eine Lösung von ${}^tP(D) G_1 = -\varphi_1 T_1$;

ist ${}^tP(D) H_s = -\varphi_s T_1$, so folgt $H_s - G_{s-1} \in \mathcal{E}_{tP}(\overline{\partial K_{s-1}})$.

Da $\mathcal{E}_{tP}(\partial\mathcal{O})$ hierin dicht liegt, läßt sich $F_s \in \mathcal{E}_{tP}(\partial\mathcal{O})$

finden, sodaß $\|H_s - G_{s-1} - F_s\|_{K'_{s-1}} \leq \frac{1}{2^s}$.

Nun definieren wir $G_s := H_s - F_s$

Es ist $G_s - G_1 \in \mathcal{E}_{tP}(\overline{\partial K_1})$ für $s > 1$, und es gilt für eine beschränkte Menge B in $D(\partial\mathcal{O})$:

$$\begin{aligned} & \sup_{\varphi \in B} |\langle (G_s - G_1), \varphi \rangle| \leq C \|G_s - G_1\|_{K'_m} \cdot \sup_{\varphi \in B} \|\varphi\|_{K_m} \leq \\ & \leq C' \sum_{j=1}^s \|G_{j+1} - G_j\|_{K'_j} \leq C' \sum_{j=1}^s \frac{1}{2^j} , \text{ falls } B \subset D(K_m) \end{aligned}$$

und $s, l \geq m$. G_s ist also eine Cauchyfolge in $D'(\partial\mathcal{O})$

und konvergiert gegen G . Es folgt:

$${}^tP(D) G|_{\overset{\circ}{K}'_s} = {}^tP(D) G_s|_{\overset{\circ}{K}'_s} = -T_1 \varphi_s|_{\overset{\circ}{K}'_s} = -T_1 \varphi_s|_{\overset{\circ}{K}'_s} ,$$

G löst also ${}^tP(D) G = -T_1$ auf $\partial\mathcal{O}$.

Sei $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\phi \equiv 1$ außerhalb einer Umgebung U von $\overline{\mathcal{O}}$,

$\phi \equiv 0$ auf einer (kleineren) Umgebung von $\overline{\mathcal{O}}$, A löse

${}^tP(D) A = -\phi T_1$ auf $\mathbb{R}^{n+1}$. Wir definieren als Fortsetzung

von f : $F := \varphi f + h + G + A$

F ist auf $\overline{\mathcal{O}}$ definiert (als Distribution) .

$${}^tP(D) F = g - g + T_2 - T_2 \phi = (1-\phi)T_2 \text{ auf } \overline{\mathcal{O}} .$$

Also gehört F zu $\mathcal{E}_{tP}(\overline{U})$.

$$F|_{O_1 \setminus \mathcal{O}} = \varphi f|_{O_1 \setminus \mathcal{O}} + (h + G)|_{O_1 \setminus \mathcal{O}} + A|_{O_1 \setminus \mathcal{O}} = f|_{O_1 \setminus \mathcal{O}} + H ,$$

wobei H aus $\mathcal{E}_{tP}(O_1)$ ist, da

$${}^tP(D) (h + G + A) = g|_{O_1} + T_1 - T_1 + 0 = 0$$

F setzt f also fort und hat kompakte Singularitätenmenge.

Wir können nun F nach 3.6. in F_1 und F_2 zerlegen, wobei

Träger $F_2 \subset \mathbb{R}^n$. F_1 ist dann die gewünschte Fortsetzung.

Wir betrachten nun folgende Fragestellung: Sei o_2 Obermenge von o_1 ; wann lassen sich alle P -Funktionale von o_1 fortsetzen auf o_2 , d.h. wann ist die Einschränkungsbildung von o_2 nach o_1 surjektiv?

3.9. Satz: Sei $o_2 \supset o_1$ und $O_1 := o_1 \times (-c, c)$ sowie

$$O_2 := (o_2 \times (-c, c)) \setminus o_2;$$

alle Randwerte lassen sich von o_1 auf o_2 fortsetzen genau dann, wenn $O_1 \cup O_2$ tP -konvex ist.

Beweis: „ $\Rightarrow$ “ Sei $g \in C^\infty(O_1 \cup O_2)$; da O_1 und O_2 tP -konvex sind, existieren h_1 und h_2 mit ${}^tP(D)h_i = g|_{O_i}$, $i = 1, 2$.

Wegen ${}^tP(D)(h_1 - h_2)|_{O_1 \cap O_2} = 0$ und

$O_1 \cap O_2 = (o_1 \times (-c, c)) \setminus o_1$ ist $h_1 - h_2$ ein Randwert auf o_1 und läßt sich nach Voraussetzung fortsetzen, d.h. es existieren $H_i \in \mathcal{E}_P(O_i)$, $i = 1, 2$, sodaß

$$(h_1 - h_2)|_{O_1 \cap O_2} = (H_1 - H_2)|_{O_1 \cap O_2}.$$

$${}^tP(D)(h_i - H_i) = g|_{O_i} \quad \text{und} \quad h_1 - H_1, \text{ sowie } h_2 - H_2 \text{ sind}$$

Einschränkungen einer Funktion $H \in C^\infty(O_1 \cup O_2)$, die ${}^tP(D)H = g$ löst.

$$, \Leftarrow \text{“ Sei } \varphi \text{ wie in 3.8. und } f \in \mathcal{E}_P(O_1 \cap O_2) / \mathcal{E}_P(O_1);$$

dann ist $g := {}^tP(D)(f\varphi)$ eine Funktion aus $C^\infty(O_1 \cup O_2)$.

Nach Voraussetzung läßt sich also ${}^tP(D)h = -g$ auf

$O_1 \cup O_2$ lösen; $h + \varphi f$ setzt dann f auf o_2 als Randwert fort (vgl. [7], Theorem 1.4.5.). □

3.10. Korollar: a) Ist o nicht tQ -konvex, so lassen sich nicht alle Randwerte von o auf $\mathbb{R}^n$ fortsetzen.

b) Ist o_2 eine Umgebung von $\bar{o}_1$, dann lassen sich alle Randwerte genau dann von o_1 nach o_2 fortsetzen, wenn sie sich nach $\mathbb{R}^n$ fortsetzen lassen.

Beweis: a) Lassen sich alle Randwerte von o nach $\mathbb{R}^n$ fortsetzen, so muß nach 3.9. $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathbb{R}^n \cup o$ tP -konvex sein.

Ist o nicht tQ -konvex, so existieren $f_s \in D(o)$ mit

$\text{Tr } (Q(D)f_s) \subset K$ kompakt in o , aber $\text{Tr } f_s \rightarrow \partial o$.

Ist $f \in D(\mathbb{R})$, $f \equiv 1$ auf $(-1, 1)$, so gilt

$$P(D)(f_s f) = (Q(D)f_s)f + i(-i)^m f_s \frac{\partial^m}{\partial t^m} f;$$

$\text{Tr } (P(D)(f_s f))$ liegt also in einem festen Kompaktum K' in $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathbb{R}^n \cup o$, während $\text{Tr } f_s f \rightarrow \partial (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathbb{R}^n \cup o)$.

Damit ist diese Menge nicht tP -konvex und es folgt a).

b), "Nach 3.9. ist $(o_2 \times (-c, c)) \setminus (\overline{o_2 \setminus o_1})$ tP -konvex. Wäre $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathbb{R}^n \cup o_1$ nicht tP -konvex, so gäbe es $f_s \in D(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathbb{R}^n \cup o_1)$

mit $\text{Tr } (P(D)f_s) \subset K \subset \mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathbb{R}^n \cup o_1$, aber

$$\text{Tr } f_s \rightarrow \partial (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathbb{R}^n \cup o_1) = \mathbb{R}^n \setminus o_1.$$

Wie in 2.1. sieht man nun, daß $\text{Tr } f_s \rightarrow \partial o_1$ und daß

$\text{Tr } f_s \subset \mathbb{R}^n \times \{(-\infty, -c') \cup (c', \infty)\} \cup o_1 \times \mathbb{R}$, falls K in

dieser Menge liegt. Ist nun $\varphi \in D(o_2 \times (-c, c))$, $\varphi \equiv 1$ auf einer Umgebung von $o_1 \times (-c', c')$, so gilt

$\text{Tr } (P(D)\varphi f_s) \subset K' \subset (o_2 \times (-c, c)) \setminus (\overline{o_2 \setminus o_1})$, aber

$\text{Tr } (\varphi f_s) \rightarrow \partial o_1$. Also wäre $(o_2 \times (-c, c)) \setminus (\overline{o_2 \setminus o_1})$ nicht tP -konvex.

" $\Leftarrow$ klar.

□

Das System der Mengen, auf die die Einschränkungsbildung von $\mathbb{R}^n$ surjektiv ist, umfaßt also die konvexen Mengen (3.5.) und ist in den tQ -konvexen Mengen enthalten (3.10.a)). Die Einschränkungsbildung von $\mathbb{R}^n$ ist also lokal surjektiv, d.h. jeder Randwert läßt sich lokal als Einschränkung eines Randwertes auf $\mathbb{R}^n$ darstellen (dies folgte schon aus 3.8.), aber die Randwertgarbe ist nicht welk.

Für $n = 2$ lassen sich genauere Aussagen machen:

3.11. Satz: Sei $n = 2$.

- a) Alle Randwerte lassen sich von o auf $\mathbb{R}^n$ genau dann fortsetzen, wenn o tQ -konvex ist.
- b) Sei o_1 zusammenhängend. Folgende Aussagen sind äquivalent:
 - (1) Jeder Randwert läßt sich von o_1 auf o_2 fortsetzen.
 - (2) Es existiert kein Halbraum H mit charakteristischer Begrenzungsgerade, sodaß $H \cap [o_1]$ einen kompakten Teil enthält, der ganz in o_2 liegt und endlichen Abstand zum Rest von $H \cap [o_1]$ hat.
 - (3) Sei $f_s \in D(o_1)$ und $\text{Tr } (Q(D)f_s) \subset K \subset o_1$; gilt $\text{Tr } f_s \rightarrow \partial o_1$, so auch $\text{Tr } f_s \rightarrow \partial o_2$.

Beweis: a) $\Rightarrow$ 3.10.a)

$\Leftarrow$ Ist o tQ -konvex im $\mathbb{R}^2$, so erfüllt es die Kegelbedingung in 3.4. (Theorem 3.7.2 in [6]). Mit Hilfe dieser Bedingung läßt sich nun beweisen (ähnlich 3.4. und 2.1.), daß $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathbb{R}^n \cup o$ tP -konvex ist. Mit 3.9. folgt die Behauptung.

b) "(1) $\Rightarrow$ (3)" Sei $O := (o_2 \times (-c, c)) \setminus (\overline{o_2 \setminus o_1})$ und $f_s \in D(o_1)$ mit $\text{Tr } (Q(D)f_s) \subset K \subset o_1$ und $\text{Tr } f_s \rightarrow \partial o_1$, aber nicht $\rightarrow \partial o_2$. Sei $f \in D(\mathbb{R})$ und $f \equiv 1$ auf $(-1, 1)$; nun folgt wie in 3.10.a), daß $\text{Tr } (P(D)(ff_s)) \subset K' \subset O$, aber $\text{Tr } (ff_s) \rightarrow \partial o_1$; da $ff_s \in D(O)$ ist, ist O nicht tP -konvex.

"(3) $\Rightarrow$ (1)" Wäre O nicht tP -konvex, so könnte sich der Träger einer Folge f_s nur ∂o_1 nähern (siehe 3.10.b)) und zwar an einer Stelle, wo ∂o_1 enthalten ist in o_2 (sonst würde sich auch $\text{Tr } (f(D)f_s) \rightarrow \partial O$ nähern).

Damit gibt es in o_1 einen charakteristischen Geradenabschnitt H , der ∂o_1 berührt und nicht ∂o_2 . Außerdem tritt H nach dem Berühren von ∂o_1 auf beiden Seiten in o_1 ein. Dann läßt sich eine Nulllösung f von $Q(D)$, die bei H beginnt, durch eine Funktion $\varphi \in E(o_1)$ so abschneiden, daß $\text{Tr}(f\varphi) \subset \bar{o}_1$, $\text{Tr}(f\varphi) \cap \partial o_1 \neq \emptyset$, $\text{Tr}(f\varphi) \cap \partial o_2 = \emptyset$ und $\text{Tr}(Q(D)(f\varphi)) \subset o_1$. Damit kann (5) nicht erfüllt sein.

Im Beweis ging stark ein, daß die einzigen charakteristischen Flächen in unserem Fall (Hyper)ebenen sind, da die charakteristischen Vektoren von P und Q isoliert liegen.

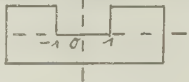
"(2) $\Rightarrow$ (1)" Sei (2) nicht erfüllt. Dann ist $H \times \mathbb{R}$ ein Halbraum mit (bzgl. tP) charakteristischer Begrenzung, für den $H \times \mathbb{R} \cap \{0\}$ einen kompakten Teil hat, der in $o_2 \times (-c, c)$ liegt und deshalb einen endlichen Abstand von $\{0\} \cap (o_2 \times (-c, c)) \cap H$ hat. Nach Voraussetzung ist aber auch der Abstand zum Rest von $\{0\} \cap H$ endlich. Mit 3.7.1 in [6] folgt, daß 0 dann nicht tP -konvex ist.

"(1) $\Rightarrow$ (2)" Sei 0 tP -konvex. Wie schon erwähnt, sind die einzigen charakteristischen Flächen Hyperebenen und damit ist 3.7.1 in [6] äquivalent zur tP -Konvexität von 0 . Es gibt also keinen charakteristischen Halbraum $H \times \mathbb{R}$, sodaß $H \times \mathbb{R} \cap \{0\}$ eine kompakte Teilmenge enthält, die einen endlichen Abstand zum Rest von $H \times \mathbb{R} \cap \{0\}$ hat. Hieraus folgt (2). □

Mit 3.11.b) läßt sich eine offene Menge o_1 konstruieren, sodaß jedes P -Funktional auf o_1 sich auf eine offene Umgebung eines jeden Randpunktes von o_1 , aber nicht auf eine Umgebung von $\bar{o}_1$ fortsetzen läßt. Die Fortsetzungen passen also nicht zusammen. Insbesondere hat es im allge-

meinen keinen Sinn, von einer größten Menge zu sprechen, auf die alle Randwerte von o_1 aus fortgesetzt werden können.

Sei $(c, 1)$ einziger charakteristischer Vektor von t_Q .

Dann ist die folgende Menge o_1  nicht t_Q -konvex. Nach 3.10.b)

gibt es also keine offene Menge

$o_2 \supset \bar{o}_1$, sodaß alle Randwerte von o_1 auf o_2 fortgesetzt werden können. Sei $(x, y) = (c, 0)$ mit $|c| \leq 1$ und

$o_2 = \{(x, y)\}$; die Einschränkungsbildung von o_2 nach o_1 ist surjektiv (3.11.b)(3)).

Für die folgende Menge o_1  ist allerdings $o_2 = \{(0, 0)\}$

die größte Menge, auf die sich alle Randwerte von o_1 aus fortsetzen lassen.

□

Hinreichend für 3.11.b) ist das folgende:

Sei $f \in D(o_2)$ und $\text{Tr}(Q(D)f) \subset o_1$, dann folgt: $\text{Tr} f \subset o_1$.

Man überlegt sich leicht, daß dieses 3.11.b) (3) nach sich zieht. Die Bedingung gleicht der Voraussetzung von Theorem 3.4.3. in [6], wo bewiesen wird, daß $\mathcal{E}_Q(o_2)$ dicht ist in $\mathcal{E}_Q(o_1)$. Die ist jedoch nicht notwendig. Als Beispiel wählen wir o_1 und o_2 wie oben und $Q(x, y) = x^4 + y^2$. Dann ist $(0, b)$ der einzige charakteristische Vektor, und das Cauchyproblem (6) mit Daten auf der y -Achse läßt sich für Funktionen mit beliebig kleinem kompaktem Träger auf $\mathbb{R}^2$ lösen. Eine so entstehende Nulllösung hat kompakten Träger in x -Richtung, und mit ihrer Hilfe kann leicht nachgewiesen werden, daß o_1 und o_2 die obige Bedingung nicht erfüllen (zum Cauchyproblem vgl. 6.4.).

□

IV. Lösungen von homogenen und inhomogenen

Differentialgleichungen

Wir werden in diesem Kapitel Lösungen von homogenen und inhomogenen Differentialgleichungen im Raum der P-Funktionale betrachten. Um die Ergebnisse auch auf gewisse Roumieu'sche Ultradistributionen anwenden zu können, gehen wir zunächst der Frage nach, welche Ultradistributionsklassen im Raum der P-Funktionale enthalten sind (und sich also auch als Randwert darstellen lassen). Hierzu kurz einige Definitionen. Eine ausführliche Darstellung der Theorie der Ultradistributionen findet man in [2], Chapitre I.

4.1. Definition: a) Sei $M_{(a)} \in \mathbb{R}^+$ für $a \in \mathbb{N}^n$.

Mit $D(M_{(a)}, U, C)$ bezeichnen wir den Raum aller C^∞ -Funktionen f mit kompaktem Träger in $\overline{U} \subset \mathbb{R}^n$, die folgende Ungleichung erfüllen:

$$\sup_{\substack{a \in \mathbb{N}^n \\ x \in U}} \frac{|D^a f(x)|}{C^{|a|} M_{(a)}} < \infty \quad (13)$$

Diese Norm macht $D(M_{(a)}, U, C)$ zu einem Banachraum.

b) Sei $D(M_{(a)}, 0) := \varinjlim_{U \subset 0} (\varinjlim_{C \uparrow \infty} D(M_{(a)}, U, C))$.

$D(M_{(a)}, 0)$ ist ein (DS)-Raum. $D'_b(M_{(a)}, 0)$ heißt der Raum der Roumieu'schen Ultradistributionen der Klasse $M_{(a)}$ auf 0. $D'_b(M_{(a)}, 0)$ ist ein (FS)-Raum.

c) $\mathcal{E}(M_{(a)}, U, C)$ sei der Raum aller C^∞ -Funktionen auf U , die (13) erfüllen. $\tilde{\mathcal{E}}(M_{(a)}, U) := \varinjlim_{C \uparrow \infty} \mathcal{E}(M_{(a)}, U, C)$ ist ein (DS)-Raum.

Sei $\mathcal{E}(M_{(a)}, 0) := \varprojlim_{U \subset 0} \varinjlim_{C \uparrow \infty} \mathcal{E}(M_{(a)}, U, C)$.

$\mathcal{E}'_{b(M(a),0)}$ heißt Raum der Ultradistributionen mit kompaktem Träger auf 0.

Wir stellen an die Folgen $M(a)$ die folgenden üblichen Bedingungen:

4.2. Definition: Eine Folge $M(a)$ gehört zur Menge $\mathcal{M}$, falls

- (1) $M(a)$ ist logarithmisch konvex, d.h. für $a_1, a_2 \in \mathbb{N}^n$ mit $a_1 \leq a_2$ gelte:

$$M(a_2)^2 \leq M(a_1+a_2) M(a_2-a_1)$$

- (2) Sei $M_1 = \inf_{|a|=1} M(a)$ und $\bar{M}_1$ die größte logarithmisch konvexe Minorante von M_1 . Es gelte: $\sum_1 \frac{M_1}{\bar{M}_{1+1}} < \infty$.

Diese Bedingung sichert, daß $D(M(a),0)$ nicht nur aus der 0-Funktion besteht (Nicht-Quasi-analytizität).

- (3) Es existieren positive Konstanten A und C, sodaß a) für beliebige $a \in \mathbb{N}^n$ gilt:

$$M(a+e_j) \leq AC^{|a|} M(a) \quad (e_j \text{ ist der Einheitsvektor in } j\text{-Richtung}).$$

Dies sichert die Stabilität von $\mathcal{E}(M(a),0)$ gegen Ableitungen.

b) Für $a_1, a_2 \in \mathbb{N}^n$ gilt: $M(a_1)M(a_2) \leq AC^{|a_1+a_2|} M(a_1+a_2)$. Hierdurch ist $\mathcal{E}(M(a),0)$ stabil gegen Multiplikation.

Reden wir also von Ultradistributionen der Klasse $M(a)$, so wird immer $M(a) \in \mathcal{M}$ vorausgesetzt.

Wir betrachten nun die Einschränkung

$$\phi: \mathcal{E}_P(0) \longrightarrow \prod_{i=0}^{m-1} C^\infty(0 \cap \mathbb{R}^n), \text{ die durch}$$

$\phi(f) := \left(\frac{\partial^i}{\partial t^i} f \Big|_{0 \cap \mathbb{R}^n} \right)_{0 \leq i \leq m-1}$ definiert wird.

Ist $M(a_j e_j) \geq c^j a_j^j$ für $1 \leq j \leq n$, (14)

so folgt $a^{-ra_j} c^{j+1} \leq \frac{C^{|a|+1}}{\prod_{j=1}^n c_j^{a_j}} \prod_{j=1}^n M(a_j e_j) \leq C^{|a|+1} M(a)$ mit 4.2.(3)b).

Da alle Funktionen aus $\mathcal{E}_P(O)$ die Abschätzung (1) erfüllen, liegt das Bild von ϕ in $\prod_{j=1}^{m-1} \mathcal{E}(M(a), o)$ ($0 \cap \mathbb{R}^n = o$).

Mit Satz 1.5. folgt, daß ϕ stetig ist von $\mathcal{E}_P(O)$ nach $\prod_{i=0}^{m-1} \mathcal{E}(M(a), \tilde{K}, C)$ mit $C \geq C(K)$, da die entsprechende Norm in $\mathcal{E}_P(O)$ stärker ist als die in $\mathcal{E}(M(a), \tilde{K}, C)$. Damit ist ϕ stetig nach $\prod_{i=0}^{m-1} \mathcal{E}(M(a), \tilde{K})$ für K kompakt in o und also auch nach $\prod_{i=0}^{m-1} \mathcal{E}(M(a), o)$.

Sei $\mathcal{E}(M(a), K) := \text{ind}_{K \supset o} \mathcal{E}(M(a), o)$; dann definiert ϕ eine stetige Abbildung $\phi': \mathcal{E}_P(K) \rightarrow \prod_{i=0}^{m-1} \mathcal{E}(M(a), K)$.

Nun liegen die analytischen Funktionen im Bild von ϕ' und außerdem dicht in $\mathcal{E}(M(a), o)$ und $\mathcal{E}(M(a), K)$; deshalb ist ${}^t\phi'$ eine injektive Abbildung von $\prod_{i=0}^{m-1} \mathcal{E}'(M(a), K)$ nach $\mathcal{E}'_P(K)$. $\mathcal{E}'(M(a), K)$ sind aber gerade die Ultradistributionen mit Träger in K : Sei $\{o_1\}$ eine

Umgebungsbasis von K , $w_1 \in D(M(a), o_1)$ eine Funktion, die auf einer Umgebung von K identisch gleich 1 ist;

sei $T \in \mathcal{E}'(M(a), \mathbb{R}^n)$ mit Träger in K bzw. T_1 die Einschränkung von $T \in \mathcal{E}'(M(a), K)$ auf $\mathcal{E}_P(M(a), o_1)$.

Dann wird ein solcher Isomorphismus durch die Gleichung $T_1 f = T(w_1 f)$, $f \in \mathcal{E}(M(a), o_1)$, definiert.

Nun sind Ultradistributionen lokal-endliche Summen von Ultradistributionen mit kompaktem Träger. Wegen

$\prod_{i=0}^{m-1} \mathcal{E}'(M(a), K) \xrightarrow{{}^t\phi'} \mathcal{E}'_P(K) \xrightarrow{{}^t\pi} \prod_{i=0}^{m-1} \mathcal{E}'_P(K)$ (siehe S.22) liegt der Träger von T als P -Functional zwischen den als Hyperfunktion

und dem als Ultradistribution. Diese beiden stimmen jedoch überein. Deshalb ist der Träger von T als P -Funktional gleich dem von T als Ultradistribution. Jeder Ultradistribution läßt sich nun mit Hilfe von ϕ' eine formale lokal-endliche Summe von P -Funktionalen mit kompaktem Träger zuordnen. Diese Summe hat im Raum der Schnitte von $\mathcal{E}_P$ einen Sinn und definiert also ein P -Funktional (vgl. [1], S.383). Die Summe ist 0 als P -Funktional in der Umgebung eines Punktes genau dann, wenn $x \notin \text{Tr}(\sum_{x \in \text{Tr } T_i} T_i)$ (vgl. [1]). Da beide Trägerbegriffe übereinstimmen, ist die obige Zuordnung wohldefiniert und injektiv.

Wir haben damit den ersten Teil des nun folgenden Satzes bewiesen. Mit Hilfe der Abbildung

${}^t\pi: \mathcal{E}'_P(K) \rightarrow \prod_{i=0}^{m-1} H^i(K)$ (siehe 5.22) läßt sich auch eine Umkehrung dieses Ergebnisses zeigen:

4.3. Satz: a) Ist $M(a_j e_j) \geq c_j a_j^{a_j} r_j^{a_j}$ für $j = 1, \dots, n$,

so ist das m -fache Produkt der Ultradistributionen der Klasse $M(a)$ als Randwert von tP darstellbar.

b) a) ist das bestmögliche Ergebnis in folgendem

Sinne: Ist $\prod_{i=0}^{m-1} \mathcal{E}'(M(a), K)$ in ${}^t\pi(\mathcal{E}'_P(K))$ für

ein $K = \bar{K} \subset \mathbb{R}^n$ enthalten, so gilt:

$M(a_j c_j) \geq c_j a_j^{a_j} r_j^{a_j}$ für $j = 1, \dots, n$

Beweis: $\prod_{i=0}^{m-1} H(K) \xrightarrow{\pi} \mathcal{E}_P(K)$

$\searrow \quad \downarrow \ell_1$
 $\prod_{i=0}^{m-1} \mathcal{E}(M(a), K) \xrightarrow{\ell_2} \prod_{i=0}^{m-1} \tilde{\mathcal{E}}(M(a), K)$

Hierbei ist l_1 vorerst nur auf den analytischen Nulllösungen von $P(D)$ definiert. (wie ϕ).

1) $t(l_2 \circ l_1)$ bildet $\prod_{i=0}^{m-1} \tilde{\mathcal{E}}'(M_{(a)}, \mathring{K})$ in $\mathcal{E}'_P(K)$ ab:

$$\langle (l_2 \circ l_1) f, (T_1) \rangle = \langle f, t(l_2 \circ l_1) (T_1) \rangle$$

Da $t_u(\prod_{i=0}^{m-1} \tilde{\mathcal{E}}'(M_{(a)}, K)) \subset t\pi(\mathcal{E}'_P(K))$, existiert ein

$$\begin{aligned} T' \in \mathcal{E}'_P(K) \text{ mit } \langle F, t_{l_1}(t_{l_2}(T_1)) \rangle &= \langle \pi(f_1), t_{l_1}(t_{l_2}(T_1)) \rangle = \\ &= \langle l_1 \circ \pi(f_1), t_{l_2}(T_1) \rangle = \langle u(f_1), t_{l_2}(T_1) \rangle = \langle F, T' \rangle, \end{aligned}$$

wobei $f_1 \in H(K)$ und $\pi(f_1) = F$.

2) 1) bedeutet, daß für eine Cauchyfolge (f_s) aus

$H_P(K)$, den analytischen Nulllösungen von $P(D)$, fol.:

$\langle f_s, t(l_2 \circ l_1) (T_1) \rangle = \langle (l_2 \circ l_1) f_s, (T_1) \rangle$ ist eine Cauchyfolge für beliebige $(T_1) \in \prod_{i=0}^{m-1} \tilde{\mathcal{E}}'(M_{(a)}, \mathring{K})$; also ist $l_2 \circ l_1$ folgenstetig von $H_P(K)$ nach $\prod_{i=0}^{m-1} \tilde{\mathcal{E}}'(M_{(a)}, \mathring{K})$ versehen mit der schwachen Topologie.

Da $\tilde{\mathcal{E}}(M_{(a)}, \mathring{K})$ ein (DS)-Raum ist, sind die beschränkten Mengen relativ-kompakt; auf diesen stimmt also die schwache Topologie mit der Ausgangstopologie überein.

Damit ist $l := l_2 \circ l_1$ folgenstetig von $H_P(K)$ nach $\prod_{i=0}^{m-1} \tilde{\mathcal{E}}'(M_{(a)}, \mathring{K})$.

Da $H_P(K)$ folgendicht in $\mathcal{E}_P(K)$ und $\tilde{\mathcal{E}}(M_{(a)}, \mathring{K})$ vollständig ist, läßt sich l zu einer folgenstetigen Abbildung

$l': \mathcal{E}_P(K) \rightarrow \prod_{i=0}^{m-1} \tilde{\mathcal{E}}'(M_{(a)}, \mathring{K})$ fortsetzen. Dies ist die Einschränkung $f \rightarrow (\frac{\partial^i}{\partial t^i} f|_{\mathring{K}})_{0 \leq i \leq m-1}$;

jede Funktion $f \in \mathcal{E}_P(0)$ erfüllt also auf $\mathring{K}$:

$$\sup_{x \in \mathring{K}} \frac{|D^\alpha f(x, 0)|}{|\alpha|!} < \infty \text{ für eine Konstante } C, \text{ speziell:}$$

$$\sup_{x \in \mathring{K}} \left| \frac{\partial^{\alpha_j}}{\partial x_j^{\alpha_j}} f(x, 0) \right| \leq C (a_j e_j)^{\alpha_j}, \quad j \in \mathbb{N};$$

Mit Theorem 4.4.3 in [6] folgt $M_{(a_j e_j)} \geq c a_j^{\alpha_j} r_j^{\alpha_j}$.

Der nächste Satz gibt die Randwertdarstellung für Ultradistributionen explizit an.

4.4. Satz: Eine Funktion $u \in \mathcal{E}_{t_P}(O \setminus o)$ stellt genau dann das m -fache Produkt der Ultradistributionen T_i der Klasse $M_{(a)}$ dar, wenn u auf O fortsetzbar ist zu einer Ultradistribution $\bar{u}$ der Klasse $N_{(a,1)}$ mit $N_{(a,1)} := M_{(a)} l^{c1}$ ($c > 1$ fest) für $a \in \mathbb{N}^n$, $l \in \mathbb{N}$,

wobei $\bar{u}$ die Differentialgleichung

$$t_{P(D)} \bar{u} = \sum_{i=0}^{m-1} T_i \otimes \delta_t^{(i)} \quad \text{erfüllt.}$$

Beweis: Wir setzen zunächst voraus, daß alle T_i kompakten Träger haben.

1) Sei $t_{P(D)} \bar{u} = \sum_{i=0}^{m-1} T_i \otimes \delta_t^{(i)}$, $f \in \mathcal{E}_P(K)$ und $w \in D(N_{(a,1)}, \mathbb{R}^{n+1})$ mit den Eigenschaften (4); dann gilt:

$$(u, f) = \langle u, P(D)(wf) \rangle_{D'(\mathcal{K})} = \langle \bar{u}, t_{P(D)}(wf) \rangle_{D'(N_{(a,1)}, \mathbb{R}^{n+1})} = \langle t_{P(D)} \bar{u}, wf \rangle_{D'(N_{(a,1)}, \mathbb{R}^{n+1})} = \sum_{i=0}^{m-1} \langle T_i, \frac{\partial^i}{\partial t^i} f|_0 \rangle_{\mathcal{E}'(M_{(a)}, o)} = \langle (T_i), \phi f \rangle_{\prod_{i=0}^{m-1} \mathcal{E}'(M_{(a)}, o)} = (t\phi(T_i), f). \text{ Also stellt } u \text{ } (T_i) \text{ dar.}$$

2) Man stelle $u \text{ } (T_i)$ dar. Dann ist $\tilde{u} := \sum_{i=0}^{m-1} \tilde{E} * (T_i \otimes \delta_t^{(i)})$

eine Ultradistribution der Klasse $N_{(a,1)}$; dies wird wie für Distributionen mit 4.2.(3)a) gerechnet.

$\tilde{u}$ gehört zu $C^\infty(\mathcal{K})$ (nach 4.5.) und stellt (T_i) dar (nach a) d.h. wir haben $(\tilde{u}, f) = (u, f)$ für alle $f \in \mathcal{E}_P(K)$.

Damit ist $\tilde{u} = u + g$ mit $g \in \mathcal{E}_{t_P}(\mathbb{R}^{n+1})$ und $\tilde{u} - g$ ist eine Fortsetzung von u , die die gewünschten Eigenschaften hat.

Seien nun die Träger der T_i beliebig.

u lasse sich fortsetzen zu $\bar{u}$ mit ${}^tP(D)\bar{u} = \sum_{i=0}^{m-1} T_i \otimes \delta_t^{(i)}$.

Sei $g \in D(M_{(a)}, 0)$, $g \equiv 1$ auf $K \subset 0$ und

$\tilde{u} := \check{E} * \left(\sum_{i=0}^{m-1} (T_i g) \otimes \delta_t^{(i)} \right)$; es folgt: $\bar{u} - \tilde{u}$ gehört zu

$\mathcal{E}_{\mathbb{P}}(\sigma \setminus (K), \text{d.h. } \bar{u}|_K = \tilde{u}|_K \text{ als Randwert.}$

Nennen wir die Einbettung in 4.3. $\alpha^t \phi'$, so erhalten wir

$\tilde{u}|_K = {}^t\phi'((T_i g))|_K = {}^t\phi'((T_i g|_K)) = {}^t\phi'((T_i)|_K)$. Also ist $\bar{u}$ das Bild von (T_i) .

Stellt nun $u \in (T_i)$ dar, so läßt es sich lokal wie in 2) darstellen und ist also lokal im obigen Sinne fortsetzbar.

Damit ist u auch global fortsetzbar.

□

Wir wollen nun partielle Differentialgleichungen im Raum der P-Funktionale betrachten. Wir beweisen zunächst wie in [1] ein Weyl'sches Lemma.

Für $T \in \mathcal{E}_P^1(K)$ definieren wir $\frac{\partial}{\partial x_j} T$ durch

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_j} T, f \right) = \left(-T, \frac{\partial}{\partial x_j} f \right), \text{ falls } f \in \mathcal{E}_P(K).$$

Die Ableitung von T als P-Funktional stimmt mit der als Ultradistribution überein, wie man leicht sieht. In der Randwertdarstellung von T bedeutet unsere Definition:

$$\begin{aligned} \left(w \frac{\partial}{\partial x_j} T, f \right) &= - \left(u_T, \frac{\partial}{\partial x_j} f \right) = - \langle u_T, P(D) \left(w \frac{\partial}{\partial x_j} f \right) \rangle = \\ &= - \langle u_T, P(D) \left(\frac{\partial}{\partial x_j} (wf) \right) \rangle + \langle u_T, P(D) \left(\frac{\partial}{\partial x_j} w f \right) \rangle = \end{aligned}$$

$= \langle \frac{\partial}{\partial x_j} u_T, P(D)(wf) \rangle$, da $\frac{\partial}{\partial x_j} w \equiv 0$ in einer Umgebung von K (w wie in 1.6.). Die obige Definition für die Ableitung eines P-Funktional mit kompaktem Träger ist also genau die Ableitung des zugehörigen Randwertes. Dies gilt dann auch für beliebige Träger.

Wenn im Folgenden die Rede davon ist, daß ein Randwert u eine Ultradistribution T darstellt, so ist damit gemeint, daß ${}^tP(D)\bar{u} = T \otimes \delta_t$.

Wir geben nun ein Kriterium dafür an, daß u ein m -faches Produkt von C^∞ -Funktionen darstellt:

u zerfällt in 2 Teile u^+ und u^- (definiert auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$ bzw. $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^-$). Jede Komponente lasse sich als C^∞ -Funktion nach $t = 0$ fortsetzen zu $\tilde{u}^+$.

$\bar{u}^+ := \begin{cases} \tilde{u}^+ & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$ ist dann eine Fortsetzung von u^+ als

(Ultra)Distribution. Wegen

${}^tP(D)\bar{u}^+ = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\partial^i}{\partial t^i} \tilde{u}^+(x, 0) \otimes \delta_t^{(m-1-i)}$ stellt u die C^∞ -Funktionen $(\frac{\partial^i}{\partial t^i} \tilde{u}^+(x, 0))$ dar. u stellt also ein m -faches Produkt von C^∞ -Funktionen dar, falls sich beide Komponenten von u nach $t = 0$ als C^∞ -Funktion fortsetzen lassen.

Wir beweisen nun das Weyl'sche Lemma:

4.5. Satz: a) Jede P -funktionelle Lösung T der homogenen Gleichung ${}^tQ(D)T = 0$ ist ein m -faches Produkt von C^∞ -Funktionen.

b) Jede ultradistributionelle Lösung der Klasse $M_{(a)}$ ($M_{(a)}$ wie in 4.3.a)) von ${}^tQ(D)T = 0$ ist unendlich oft differenzierbar.

Beweis: Der Randwert u auf $\mathbb{R}^n$ löse ${}^tQ(D)u = 0$, d.h.

${}^tQ(D)u = f$ mit $f \in \mathcal{E}'_P(\mathbb{R}^{n+1})$. Wir lösen jetzt das System

${}^tP(D)g = 0$ auf $\mathbb{R}^{n+1}$, was nach Theorem 3.2 von [10]
 ${}^tQ(D)g = f$

möglich ist, da ${}^tP(D)f = 0$ und $\mathbb{R}^{n+1}$ konvex ist.

$v = u - g$ stellt denselben Randwert wie u dar und erfüllt die Gleichungen ${}^tQ(D)v = 0$ und ${}^tP(D)v = 0$ auf $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathbb{R}^n$.

$${}^tP(D)v = -i^{m+1} \frac{\partial^m}{\partial t^m} v = 0 \text{ auf } \mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathbb{R}^n$$

Wir können v auffassen als Funktion von t mit Werten in $\mathcal{E}_Q(\mathbb{R}^n)$. Die obige Gleichung hat deshalb als Lösungen gerade den Raum $\mathcal{E}_Q(\mathbb{R}^n) \otimes \mathcal{P}^{(m)}$, wobei $\mathcal{P}^{(m)}$ die skalaren Lösungen von $\frac{\partial^m}{\partial t^m} f = 0$ sind, d.h. gerade die Polynome in t vom Grad kleiner als m ([15]).

Die Komponenten von v lassen sich also unendlich oft differenzierbar in eine Umgebung von $t = 0$ fortsetzen, und u stellt damit ein m -faches Produkt von C^∞ -Funktionen dar.

b) klar, da jede Ultradistribution dieser Klasse ein P -Funktional definiert.

□

Durch lokale Rechnung ergibt derselbe Beweis das Ergebnis für beliebige offene Mengen o im $\mathbb{R}^n$.

Im Folgenden behandeln wir die inhomogene Gleichung $H(D)u = v$, wobei $H(D)$ ein partieller Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten ist, und u bzw. v Randwerte von tP auf o sind.

4.6. Satz: a) Lassen sich alle t -Funktionen von o auf $\mathbb{R}^n$ fortsetzen, so ist die Gleichung $H(D)u = v$ für beliebige Randwerte v auf o lösbar (" o ist P -funktionell H -konvex").

b) Ist $n = 2$, so sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(1) o ist P -funktionell H -konvex für einen beliebigen Operator $H(D)$

(2) o ist tQ -konvex

(3) Alle Randwerte von o lassen sich auf $\mathbb{R}^n$
fortsetzen

Beweis: a) Sei v ein Randwert auf o , $\bar{v}$ seine Fortsetzung

auf $\mathbb{R}^n$. Das System
$$\begin{aligned} H(D)u &= \bar{v} \\ {}^tP(D)u &= 0 \end{aligned}$$
 läßt sich auf

$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$ bzw. $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^-$ lösen, da ${}^tP(D)\bar{v} = 0$ auf $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathbb{R}^n$.

u ist also ein Randwert, der $H(D)u = \bar{v}$ auf $\mathbb{R}^n$ löst.

$u|_o$ löst damit $H(D)(u|_o) = \bar{v}|_o = v$.

b) Nach 3.11.a) ist (2) äquivalent zu (3).

"(3) $\Rightarrow$ (1)" wird von a) geliefert. Es bleibt zu zeigen:

"(1) $\Rightarrow$ (2)" Lassen sich alle Gleichungen $H(D)u = v$
auf o lösen, dann speziell ${}^tQ(D)u = v$, wobei v eine
Funktion f aus $C^\infty(o)$ darstellt.

$({}^tQ(D) + i(i \frac{\partial}{\partial t})^m)u = 0$ läßt sich also auf $O \setminus o$ lösen.
 ${}^tQ(D)u = v$

Wegen ${}^tQ(D)u = -i^{m+1} \frac{\partial^m}{\partial t^m} u$ ist u ein m -faches Integral

von v (bis auf eine Konstante).

Da v distributionell fortsetzbar auf o ist, ist auch u
fortsetzbar zu $\bar{u}$.

Nach 5.1. läßt sich ${}^tP(D)\bar{u}$ folgendermaßen zerlegen:

$${}^tP(D)\bar{u} = \sum_{i=0}^{m-1} T_i \otimes \delta_t^{(i)} + {}^tP(D)T, \quad T_i \in D'(o), \quad T \in D'(O)$$

mit Träger in o . Da T durch unterschiedliche Fortsetzung
von u entsteht, können wir ohne Einschränkung $T = 0$ setzen.

$$f \otimes \delta_t = {}^tP(D)\bar{v} = {}^tP(D)({}^tQ(D)\bar{u} + H) = \sum_{i=0}^{m-1} {}^tQ(D)T_i \otimes \delta_t^{(i)} + {}^tP(D)H$$

mit $H \in D'(O)$, $\text{Tr } H < 0$, denn ${}^tQ(D)\bar{u}$ ist eine Fortsetzung

von v . Da die Darstellung in 5.1. eindeutig ist, folgt

${}^tQ(D)T_o = f$. Also ist o tQ -konvex.

□

Ist speziell $H = {}^tQ$, so ist die Lösung von ${}^tQ(D)u = v$ für P-Funktionale u und v besonders einfach. Der folgende Satz gilt für beliebiges n .

- 4.7. Satz: a) ${}^tQ(D)u = v$ läßt sich genau dann auf 0 für beliebige Randwerte von tP lösen, falls 0 tQ -konvex ist. Die Lösung ist ein m -faches Integral von v in t -Richtung, das in $\mathcal{E}_P(0 \setminus 0)$ liegt.
- b) ${}^tQ(D)$ ist genau dann surjektiv von $D'(M_{(a)}, 0)$ nach $D'(M_{(a)}, 0)$, wenn 0 tQ -konvex ist.

Beweis: a) „ $\Rightarrow$ “ folgt wie in 4.6.

„ $\Leftarrow$ “ Sei $v \in \mathcal{E}_P(0 \setminus 0)$; eine Lösung der gestellten Aufgabe kann sich von dem m -fachen Integral mit variabler oberer Grenze $-(-i)^{m+1} \int_1^t v(x, \tau) (d\tau)^m$ nur um eine Nulllösung von $\frac{\partial^m}{\partial t^m}$ auf O^+ unterscheiden. Außerdem muß gelten:

$${}^tP(D)(-(-i)^{m+1} \int_1^t v(x, \tau) (d\tau)^m - \sum_{i=0}^{m-1} f_i(x) t^i) = 0$$

mit $C^\infty(0)$ -Funktionen f_i . Hieraus folgt:

$$(-i)^{m+1} \int_1^t {}^tQ(D)v(x, \tau) (d\tau)^m + i(-i)^m v(x, t) =$$

$$= (-i)^{m+1} \sum_{i=0}^{m-1} {}^tQ(D)f_i(x) t^i \quad \text{und mithin}$$

$$(-1)^{m+2} \int_1^t \frac{\partial^m}{\partial t^m} v(x, \tau) (d\tau)^m - v(x, t) = \sum_{i=0}^{m-1} {}^tQ(D)f_i(x) t^i$$

$$\text{d.h. } (-1)^{m+1} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{(t-1)^i}{i!} \left(\frac{\partial^i}{\partial t^i} v \right)(x, 1) = \sum_{i=0}^{m-1} {}^tQ(D)f_i(x) t^i$$

Ordnet man die linke Seite nach Potenzen von t , so erhält man ein Polynom $(m-1)$ -ten Grades mit $C^\infty(0)$ -Koeffizienten. Da 0 tQ -konvex ist, läßt sich dann die obige Gleichung lösen. Analog verfährt man mit O^- .

b) " $\Leftarrow$ " Ist ${}^tQ(D)$ surjektiv: $D'(M_{(a)}, 0) \longrightarrow D'(M_{(a)}, 0)$,
 so existiert eine Ultradistribution T mit ${}^tQ(D)T = f$
 für f aus $C^\infty(0)$. Es ist zu zeigen, daß T zu $D'(0)$ gehört.
 Sei $g \in D(0)$, $g \equiv 1$ auf $K \subset 0$ und $\check{E}_1$ eine Fundamentallösung
 von ${}^tQ(D)$. Nun löst $T_1 := \check{E}_1 * gf$ auf K dieselbe Differential-
 gleichung wie T ; $(T_1 - T)|_K^0$ gehört also zu $\mathcal{E}_{t_Q}(\overset{\circ}{K})$ und
 damit nach 4.5. zu $C^\infty(\overset{\circ}{K})$. Dasselbe gilt dann für T .
 $\Rightarrow$ " Es ist zu zeigen, daß die nach a) existierende
 P-funktionelle Lösung u von ${}^tQ(D)u = T$ eine Ultradistri-
 bution aus $D'(M_{(a)}, 0)$ ist. Lokal existiert eine Lösung
 dieser Gleichung im obigen Raum. Diese kann sich von u
 nach dem Weylschen Lemma nur um eine C^∞ -Funktion unter-
 scheiden. u gehört also lokal und damit auch global zu
 $D'(M_{(a)}, 0)$. □

V. Distributioneller Randwert

In einigen Arbeiten hat H.G.Tillmann von 1953 - 1963 einen distributionellen Randwertbegriff für holomorphe Funktionen untersucht und bewiesen, daß sich $D'(\mathbb{R})$ als Randwert der auf $C^\infty(\mathbb{R})$ definierten Nulllösungen von $\frac{d}{dz}$ darstellen läßt durch Funktionen f , die die Abschätzungen

$$\sup_{\substack{0 < t \leq 1 \\ 0 < t' \leq 1}} |f(x+it)t^k| < \infty \text{ für ein } k(s) \text{ und } s \in \mathbb{N} \text{ erfüllen}$$

("lokal langsam wachsende holomorphe Funktionen").

Der Randwert war durch

$$\lim_{t, t' \searrow 0} \int (f(x+it) - f(x-it')) g(x) dx =: \langle T, g \rangle \text{ für}$$

$g \in D(\mathbb{R})$ gegeben.

In diesem Kapitel wird der analoge Ausdruck für Nulllösungen des Operators $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} + i(+i \frac{\partial}{\partial t})^m$ untersucht. Hierbei kann m eine beliebige natürliche Zahl sein. Es werden die für holomorphe Funktionen bekannten Ergebnisse hergeleitet. Insbesondere wird eine Beziehung zur Randwertdarstellung in 4.4. hergestellt.

Sei $\mathcal{E}_{t_P, D'}$ die Menge aller Funktionen aus $\mathcal{E}_{t_P}(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathbb{R}^n)$, für die der folgende Grenzwert für beliebige $g \in D(\mathbb{R}^n)$

$$\text{existiert: } \lim_{t, t' \searrow 0} \int (f(x, t) - f(x, -t')) g(x) dx =: \langle T_f, g \rangle \quad (15)$$

Unser erstes Ziel ist der Satz, daß $\mathcal{E}_{t_P, D'}$ mit den Nulllösungen übereinstimmt, die sich distributionell auf $\mathbb{R}^{n+1}$ fortsetzen lassen. Dies führt zu einer Beschreibung des Grenzwertes (15) analog der in Kapitel IV.

Wir bezeichnen mit $D'(\mathbb{R}^{n+1})$ den Raum der Distributionen auf $\mathbb{R}^{n+1}$ mit Träger in $\mathbb{R}^n$.

Wir geben zunächst eine eindeutige Zerlegung dieses Raumes mit Hilfe von $t_P(D)$ an:

5.1. Hilfssatz: $D'_R(R^{n+1}) = t_{P(D)} D'_R(R^{n+1}) \bigoplus_{i=0}^{m-1} D'_R(R^n) \otimes \sigma_t^{(i)}$

d.h. $T = t_{P(D)} H + \sum_{i=0}^{m-1} H_i \otimes \sigma_t^{(i)}$ (eindeutig)

mit $T, H \in D'_R(R^{n+1})$, $H_i \in D'_R(R^n)$.

Beweis: Ist $T \in D'_R(R^{n+1})$, so läßt sich T eindeutig als

$T = \sum_{j=0}^{(l+1)m-1} H_j \otimes \sigma_t^{(j)}$ schreiben mit $H_j \in D'_R(R^n)$ (siehe

[14]). Für $l = 0$ sind wir fertig.

Ist l größer als 0, so muß

$\sum_{j=lm}^{(l+1)m-1} H_j \otimes \sigma_t^{(j)} = t_{P(D)} F + \sum_{i=0}^{m-1} B_i \otimes \sigma_t^{(i)}$ gezeigt werden,

wobei F und B_i durch H_j eindeutig bestimmt sind.

Da auch für F die eindeutige Zerlegung

$F = \sum_{s=0}^k F_s \otimes \sigma_t^{(s)}$ gilt, folgt mit Koeffizientenvergleich

nach der Ableitungsordnung von σ : $F_s = 0$ für $s \geq lm$;

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^{lm-1} t_{Q(D)} F_s \otimes \sigma_t^{(s)} + i^{m+1} \sum_{s=0}^{lm-1} F_s \otimes \sigma_t^{(s+m)} + \sum_{i=0}^{m-1} B_i \otimes \sigma_t^{(i)} &= \\ = \sum_{j=lm}^{(l+1)m-1} H_j \otimes \sigma_t^{(j)} \end{aligned}$$

Dies ergibt: $F_{sm+i} = (-1)^{l-1-s} (-i)^{(m+1)(l-s)} (t_{Q(D)})^{l-1-s} H_{lm+i}$

$B_i = (-1)^1 (-i)^{(m+1)1} (t_{Q(D)})^1 H_{lm+i}$

für $0 \leq s \leq l-1$ und $0 \leq i \leq m-1$.

Hiermit sind F und B_i eindeutig bestimmt.

□

Wir benötigen noch einige technische Hilfssätze.

Sei $\sigma_{s,\tau}$ eine Folge aus $D(\mathbb{R})$, die gegen die Punktauswertung in τ konvergiert, $\int \sigma_{s,\tau}(t) dt = 1$, $\sigma_{s,\tau} \geq 0$ und $\text{Tr } \sigma_{s,\tau} \in B_{1/s}(\tau)$.

Ist $f(x, \tau)$ stetig auf $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathbb{R}^n$, so gilt:

$$\int f(x, \tau) g(x) dx = \lim_s \int f(x, t) g(x) \sigma_{s,\tau}(t) dt dx \quad \text{für jedes } g \in D(\mathbb{R}^n).$$
 Da f gleichmäßig stetig auf $\text{Tr } g \times \text{Tr } \sigma_{s,\tau}$ ist, folgt nämlich:
$$\left| \int f(x, \tau) g(x) dx - \int f(x, t) g(x) \sigma_{s,\tau}(t) dx dt \right| \leq \int |f(x, \tau) - f(x, t)| |g(x)| |\sigma_{s,\tau}(t)| dx dt \leq \varepsilon \|g\| \int \sigma_{s,\tau}(t) dt \leq \varepsilon$$
 für genügend große s . □

Wir beweisen zunächst, daß der Grenzwert (15) für eine Fundamentallösung $\check{E}$ von $\tau_P(D)$ existiert und erhalten das Ergebnis für alle distributionell fortsetzbaren Nulllösungen durch Faltung.

5.2. Hilfssatz: Sei $v_s \in D((-1, 1))$ und $\mu(\text{Tr } v_s) \rightarrow 0$

(μ das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^n$), sowie $v_s \equiv 1$ auf einer Umgebung von 0 und $v_s \geq 0$. Sei $\check{E}$ eine Fundamentallösung von $\tau_P(D)$. Es gilt:

a) $-i^{m+1} \lim_s \left\langle \frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}} \check{E}, g v'_s \right\rangle = g(0)$ für $g \in D(\mathbb{R}^n)$

b) $\lim_s \left\langle \frac{\partial^i}{\partial t^i} \check{E}, g v'_s \right\rangle = 0$ für $0 \leq i \leq m-2$

Beweis: a) $g(0) = g(0) v_s(0) = \langle \sigma, g v_s \rangle = \langle \check{E}, \tau(D)(g v_s) \rangle = \langle \check{E}, (Q(D)g) v_s \rangle + i(-i)^m \left\langle \check{E}, g \frac{\partial^m}{\partial t^m} v_s \right\rangle = \langle \check{E}, Q(D)(g v_s) \rangle - i^{m+1} \left\langle \frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}} \check{E}, g v'_s \right\rangle$

Es ist nur zu zeigen, daß $\langle \check{E}, Q(D)(g v_s) \rangle$ gegen 0 konvergiert, und zwar für eine mit Hilfe der Hörmander'schen Treppe konstruierte Elementarlösung, da sich $\check{E}$ von dieser nur um $u \in \mathcal{E}_{\text{LP}}(\mathbb{R}^{n+1})$ unterscheidet und

$$|\langle u, Q(D)g v_s \rangle| \leq C \mu(\text{Tr } v_s) \text{ gegen } 0 \text{ konvergiert.}$$

Sei $M \geq 2$ eine Konstante und B eine Kugel um 0, sodaß

$$|Q(x)| \geq 1 \text{ für } x \in B \text{ und } |Q(x)| \leq \frac{M}{2} \text{ für } x \in B, \text{ so definiert}$$

$$\langle \check{E}, g h \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{n+1}} \left(\iint_{\mathbb{R}^n} \frac{\widehat{g}(x) \widehat{h}(t)}{Q(x) + it^m} dx dt + \iint_{\mathbb{R}^n} \frac{\widehat{g}(x) \widehat{h}(t+iM)}{Q(x) + i(t+iM)^m} dx dt \right)$$

eine Fundamentallösung $\check{E}$ von $t^m P(D)$.

Es ist $|P(z)| \geq 1$ auf der Treppe (im linken Integral:

$$|P(x)| \geq |Q(x)| \geq 1; \text{ im rechten Integral:}$$

$$|P(z)| \geq |t+iM|^m - |Q(x)| \geq M^m - \frac{M}{2} \geq 1).$$

Sei zuerst $m \geq 2$;

$$|\widehat{v_s}(t)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} v_s(\tau) e^{-i\langle \tau, t \rangle} d\tau \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |v_s(\tau)| d\tau \text{ und}$$

$$|v_s(t+iM)| \leq e^M \int_{-\infty}^{\infty} |v_s(\tau)| d\tau \text{ sowie}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |P(z)|^{-1} dt \leq \int_{-\infty}^{-1} |t|^{-m} dt + \int_{-1}^1 1 dt + \int_1^{\infty} |t|^m dt \leq 4 \quad (\text{für } z$$

aus der Hörmander'schen Treppe), läßt sich $|\langle \check{E}, Q(D)g v_s \rangle|$ folgendermaßen abschätzen:

$$(2\pi)^{-n-1} \left(\iint_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\widehat{Q(D)g}(x) \widehat{v_s}(t)}{Q(x) + it^m} \right| dx dt + \iint_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\widehat{Q(D)g}(x) \widehat{v_s}(t+iM)}{Q(x) + i(t+iM)^m} \right| dx dt \right) \leq$$

$$\leq (2\pi)^{-n-1} e^M \int_{-\infty}^{\infty} |v_s(\tau)| d\tau \int_{\mathbb{R}^n} |Q(x) \widehat{g}(x)| dx \leq$$

$$\leq C \mu(\text{Tr } v_s) \longrightarrow 0 \text{ für } s \longrightarrow \infty;$$

$$\text{dies ergibt } \lim_s \langle \check{E}, (Q(D)g) v_s \rangle = 0.$$

Ist $m = 1$, so wird das Integral über t folgendermaßen zerlegt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\widehat{v}_S(t)}{Q(x)+it} \right| dt \leq 2 \int_{-\infty}^{\infty} |v_S(t)| dt + 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\widehat{v}_S(t)| |\widehat{v}'_S(t)|}{|t|^{3/2}} dt \leq$$

$$\leq C \sqrt{2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |v_S(t)| dt \right)^{1/2} + 2 \int_{-\infty}^{\infty} |v_S(t)| dt \quad \text{und analog}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\widehat{v}_S(t+ik)}{Q(x)+i(\tau+iM)} \right| dt \leq C \left(\int_{-\infty}^{\infty} |v_S(t)| dt \right)^{1/2} + e^{kM} \int_{-\infty}^{\infty} |v_S(t)| dt$$

Damit konvergiert auch für $m = 1 \in \check{E}$, $\langle Q(D)g \rangle_{v_S}$ gegen 0.

b) Aus $\frac{\partial^{i+1}}{\partial t^{i+1}} v_S(t) = t^{i+1} \widehat{v}_S(t)$ folgt die Behauptung für

$i \leq m-3$ wie in a) Teil 1 und für $K = m-2$ wie in a) Teil 2.

Es gilt nämlich: $\langle \frac{\partial^i}{\partial t^i} \check{E}, g v'_S \rangle = \langle \check{E}, g v_S^{(i+1)} \rangle (-1)$.

□

5.3. Hilfssatz: $\lim_{s \rightarrow \infty} \int (\check{E}^{(m-1)}(x, t_s) - \check{E}^{(m-1)}(x, -t'_s)) g(x) dx =$

$$= \lim_s \int \check{E}^{(m-1)}(x, t) g(x) v'_S(t) dt dx = -(-i)^{m+1} g(0)$$

Hierbei kann v_S zu den Nullfolgen t_s, t'_s so gewählt werden, daß 5.2. erfüllt wird $(\check{E}^{(m-1)}) = \frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}} \check{E}$.

Beweis: Für $t_s \neq 0$ gilt:

$$\lim_K \int \check{E}^{(m-1)}(x, t) g(x) \mathcal{J}_{K, t_s}(t) dt dx = \int \check{E}^{(m-1)}(x, t_s) g(x) dx$$

Wählt man nun $\mathcal{J}_{1, t_1}$ so, daß $0 \notin \text{Tr } \mathcal{J}_{1, t_1}$ und

$$\left| \int \check{E}^{(m-1)}(x, t) g(x) \mathcal{J}_{1, t_1}(t) dt - \int \check{E}^{(m-1)}(x, t_1) g(x) dx \right| \leq \frac{1}{1}$$

(analog für $-t'_1$), so erfüllt

$$v_1(t) := \int_{-\infty}^t \mathcal{J}_{1, -t'_1}(\tau) - \mathcal{J}_{1, t_1}(\tau) d\tau \quad \text{die Voraussetzung von 6.2.}$$

und es gilt:

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \int (\check{E}^{(m-1)}(x, t_1) - \check{E}^{(m-1)}(x, -t'_1)) g(x) dx =$$

$$= \lim_1 \int \check{E}^{(m-1)}(x, t) v'_1(t) g(x) dx dt.$$

Insbesondere existiert der erste Grenzwert und hat den Wert $-(-i)^{m+1}g(0)$ (nach 5.2.) .

□

Damit ergibt sich der folgende

5.4. Satz: Ist $u \in \mathcal{E}_P(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathbb{R}^n)$ als Distribution fortsetzbar auf $\mathbb{R}^{n+1}$, so existiert

$$\lim_{t, t' \searrow 0} \int (u(x, t) - u(x, -t')) g(x) dx =: \langle T_u, g \rangle$$

und definiert eine Distribution auf $\mathbb{R}^n$. T_u ist gerade der in der eindeutigen Zerlegung (nach 5.1.) von

${}^tP(D) \bar{u}(x, t)$ zu $\delta_t^{(m-1)}$ gehörende Faktor multipliziert mit $-(-i)^{m+1}$.

Beweis: Da $u \in \mathcal{E}_P(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathbb{R}^n)$, folgt ${}^tP(D) \bar{u} \in D'_{\mathbb{R}^n}(\mathbb{R}^{n+1})$

und ${}^tP(D) \bar{u}$ läßt sich nach 5.1. zerlegen:

$${}^tP(D) \bar{u} = {}^tP(D) H + \sum_{i=0}^{m-1} H_i \otimes \sigma_t^{(i)} \quad . \quad H \text{ kann ohne Einschränkung}$$

gleich 0 gesetzt werden. Sei zunächst $H_i := D^a f_i$ mit $f_i \in C(\mathbb{R}^n)$ und $\text{Tr } f_i$ kompakt. Dann ist

$$\tilde{u} := \sum_{i=0}^{m-1} (H_i \otimes \sigma_t^{(i)}) * \check{E} \quad \text{definiert auf } \mathbb{R}^{n+1} \quad \text{und löst}$$

$${}^tP(D) \tilde{u} = \sum_{i=0}^{m-1} H_i \otimes \sigma_t^{(i)} \quad .$$

$\tilde{u}$ und $\bar{u}$ unterscheiden sich also nur um eine Funktion aus $\mathcal{E}_P(\mathbb{R}^{n+1})$, und deshalb gilt $T_u = T_{\tilde{u}}$, falls einer der beiden Grenzwerte existiert.

$\phi(x) := \langle y^{D^a f_{m-1}}, g(x+y) \rangle$. Es folgt:

$$\langle y^{D^a f_{m-1}}, g(y) \rangle = \phi(0) \underset{5.2.}{=} -i^{m+1} \lim_s \langle \check{E}^{(m-1)}(x, t), \phi(x) v'_s(t) \rangle .$$

$$\begin{aligned}
 &= -i^{m+1} \lim_{t_1, t_1' \rightarrow 0} \int (\check{E}^{(m-1)}(x, t_1) - \check{E}^{(m-1)}(x, -t_1')) \phi(x) dx \\
 &\int \check{E}^{(m-1)}(x, t_1) \phi(x) dx = \lim_S \int \check{E}^{(m-1)}(x, t) \phi(x) \mathcal{D}_{S, t_1}(t) dx dt = \\
 &= \lim_S \langle \check{E}^{(m-1)}(x, t), \langle f(y) \otimes \mathcal{D}_t, \mathcal{E}^{(a)}(x+y) \mathcal{D}_{S, t_1}(\tau+y) \rangle \rangle = \\
 &= \lim_S \langle (\check{E}^{(m-1)} * f^{(a)}) \otimes \mathcal{D}_t, \mathcal{E} \mathcal{D}_{S, t_1} \rangle = \\
 &= \lim_S \int \tilde{u}_{m-1}(x, t) \mathcal{E}(x) \mathcal{D}_{S, t_1}(t) dx dt = \int \tilde{u}_{m-1}(x, t_1) \mathcal{E}(x) dx
 \end{aligned}$$

$$\text{Hierbei ist } \tilde{u}_{m-1} := \check{E} * (H_{m-1} \otimes \mathcal{D}_t^{(m-1)}) \Big|_{\mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathbb{R}^n}$$

und man sieht ebenso (mit 5.2.b)), daß für

$$\tilde{u}_i := \check{E} * H_i \otimes \mathcal{D}_t^{(i)}, \quad 0 \leq i \leq m-2, \text{ der entsprechende Limes}$$

0 ergibt.

Sei der Träger der H_i beliebig.

Sei $\{o_s\}$ eine offene Quaderüberdeckung von o und K_S kompakt in o_s , sodaß auch $\dot{K}_S$ noch o überdeckt.

Sei $g_s \in D(o_s)$, $g_s \equiv 1$ auf K_S , und h_s eine Zerlegung der 1 zu $\dot{K}_S$.

Sei $H_i|_{o_s} = D^{a_{i,s}} f_{i,s}$. Durch Integrieren können wir

erreichen, daß $a_{i,s} = a_{k,s} = a_s$ unabhängig vom ersten

Index wird. Nun ist $D^{a_s}(f_{i,s} g_s)|_{\dot{K}_S} = H_i|_{\dot{K}_S}$ und für

$$u_s := \check{E} * \left(\sum_{i=0}^{m-1} D^{a_s}(f_{i,s} g_s) \otimes \mathcal{D}_t^{(i)} \right) \text{ stimmen } \langle T_{u_s}, \mathcal{E} \rangle \text{ und}$$

$\langle T_{u_s}, g \rangle$ überein, falls g zu $D(\dot{K}_S)$ gehört. Es folgt:

$$-(-i)^{m+1} \langle H_{m-1}, g \rangle = -(-i)^{m+1} \sum_S \langle H_{m-1}, h_S g \rangle =$$

$$= \sum_S \langle D^{a_s}(f_{m-1,s} g_s), h_S g \rangle = \sum_S \langle T_{u_s}, h_S g \rangle =$$

$$= \sum_S \langle T_{u_s}, h_S g \rangle = \langle T_u, \sum_S h_S g \rangle = \langle T_u, g \rangle$$

□

5.5. Korollar: Die Abbildung $T^m : \mathcal{E}_{P,D} \rightarrow \prod_{i=0}^{m-1} D'(\mathbb{R}^n)$,
die definiert wird durch

$$T^m u := -i^{m+1} (T \frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}} u, \dots, T \frac{\partial}{\partial t} u, T u),$$

ist surjektiv. Ist $t_{P(D)} \bar{u} = \sum_{i=0}^{m-1} H_i \otimes \sigma_t^{(i)}$, so gilt

$T^m u = (H_0, \dots, H_{m-1})$. T^m stimmt also mit dem
Randwert von u als P -Funktional überein.

Beweis: Nach 5.1. ist $\overline{t_{P(D)} u^{(k)}} = \frac{\partial^k}{\partial t^k} t_{P(D)} \bar{u} =$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=k}^{m-1} H_{i-k} \otimes \sigma_t^{(i)} + \sum_{i=m}^{m-1+k} H_{i-k} \otimes \sigma_t^{(i)} = \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} -i^{m+1} H_{i-k+m} \otimes \sigma_t^{(i)} - \sum_{i=0}^{k-1} i^{m+1} t_{Q(D)} H_{i-k+m} \otimes \sigma_t^{(i)} + \\ &+ \sum_{i=k}^{m-1} H_{i-k} \otimes \sigma_t^{(i)}. \end{aligned}$$

Deshalb gilt: $T_{u(k)} = -(-i)^{m+1} H_{m-1-k}$ und

$$T^m u = (H_0, \dots, H_{m-1}).$$

$t_{P(D)} \bar{u} = \sum_{i=0}^{m-1} H_i \otimes \sigma_t^{(i)}$ läßt sich für beliebige $H_i \in D'(\mathbb{R}^n)$

lösen, also ist T^m surjektiv. □

5.6. Satz: Existiert für $u \in \mathcal{E}_P(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathbb{R}^n)$ der Grenzwert

$$\lim_{t, t' \searrow 0} \int (u(x, t) - u(x, -t')) g(x) dx \quad \text{für alle}$$

$g \in D(\mathbb{R}^n)$, so läßt sich u als Distribution auf

$\mathbb{R}^{n+1}$ fortsetzen.

Beweis: $\{u(x,t) \mid 0 < t < c\}$ ist beschränkt in $D'(\mathbb{R}^n)$, d.h.

$$\left| \int_{K \times (-\infty, c)} u^+(x,t) g(x) h(t) dt dx \right| \leq \int_0^c |h(t)| \left| \int u^+(x,t) g(x) dx \right| dt \leq \\ \leq C' \int_{\mathbb{R}^{n+1}, t} |h(t) g^{(a)}(x)| dx dt, \text{ falls } \text{Tr } h \in (-\infty, c).$$

Das Integral existiert also und definiert eine distributionelle Fortsetzung von u^+ , da es beschränkte Mengen in $D(\mathbb{R}^{n+1})$ in beschränkte Mengen überführt (vgl. [16], S.95).

5.7. Korollar: Eine Nulllösung u von $t_P(D)$ auf $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathbb{R}^n$

gehört genau dann zu $\mathcal{E}_{t_P}(\mathbb{R}^{n+1})$, wenn für

$0 \leq k \leq m-1$ und alle $g \in D(\mathbb{R}^n)$ gilt:

$$\lim_{t, t' \searrow 0} \int (u^{(k)}(x,t) - u^{(k)}(x, -t')) g(x) dx = 0$$

Beweis: $\Rightarrow$ "klar, da $u \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$

$\Leftarrow$ nach 5.6. ist u fortsetzbar, nach 5.5. gilt

$t_P(D) \bar{u} = t_P(D) H$ mit $H \in D'_{\mathbb{R}^n}(\mathbb{R}^{n+1})$. $\tilde{u} := \bar{u} - H$ ist dann eine

Nulllösung von $t_P(D)$ auf $\mathbb{R}^{n+1}$.

Der erste Teil der angekündigten Sätze ist damit vollständig bewiesen. Nun sollen die distributionell fortsetzbaren Nulllösungen von $t_P(D)$ wie in der Theorie der Randwerte holomorpher Funktionen durch Wachstumsbedingungen charakterisiert werden. Hierzu werden wieder einige technische Hilfssätze benötigt.

Zunächst wird eine Wachstumsbedingung für eine Fundamentallösung von $t_P(D)$ hergeleitet, die dann per Faltung den Nachweis einer Wachstumsbedingung für beliebige Elemente aus $\mathcal{E}_{t_P, D}$ ermöglicht.

5.8. Hilfssatz:

$$a) \frac{\partial^k}{\partial t^k} \left(\frac{1}{Q(x)+it^m} \right) = \frac{1}{(Q(x)+it^m)^{k+1}} \sum_{s=0}^{\{k\}} c_s t^{m(k-s)-k} Q^s(x)$$

Hierbei sind c_s Konstanten und $\{k\}$ die größte ganze Zahl kleiner gleich $k \frac{m-1}{m}$.

$$b) \frac{\partial^k}{\partial t^k} \left(\frac{t^1}{Q(x)+it^m} \right) = \sum_{s=0}^1 c_s \left(\frac{1}{Q(x)+it^m} \right)^{(k-s)} t^{1-s}$$

Beweis: b) ist klar; a) wird durch Induktion bewiesen:

$$k = 1: \left(\frac{1}{Q(x)+it^m} \right)' = c \frac{t^{m-1}}{(Q(x)+it^m)^2} = \\ = \sum_{s=0}^{\{k\}} c_s t^{m(k-s)-k} Q^s(x) \frac{1}{(Q(x)+it^m)^s}$$

$$\text{da } \{1\} = \left\lfloor \frac{m-1}{m} \right\rfloor = 0 \text{ und } m(1-0)-1 = m-1;$$

Sei die Behauptung für k erfüllt. Wir unterscheiden zwei Fälle:

1) $m(k - \{k\}) - k = 0$ (d.h. $\frac{m-1}{m} k$ ist eine natürliche Zahl, also $k = lm$ mit $l \in \mathbb{N}$). Damit folgt

$$\{k\} = \left\lfloor k \frac{m-1}{m} \right\rfloor = \left\lfloor (k+1) \frac{m-1}{m} \right\rfloor = \{k+1\}.$$

$$\left(\frac{1}{Q(x)+it^m} \right)^{(k+1)} = (B(t) (Q(x)+it^m)^{-k-1})' = \\ = (Q(x)+it^m)^{-k-2} (cB(t)t^{m-1} + (Q(x)+it^m) \sum_{s=0}^{\{k\}-1} c_s t^{m(k-s)-k-1} Q^s(x)) = \\ = (Q(x)+it^m)^{-k-2} \left(\sum_{s=0}^{\{k\}} c_s t^{m(k-s)-k+m-1} Q^s(x) + \right. \\ \left. + \sum_{s=0}^{\{k\}-1} c_s t^{m(k-s)-k-1} Q^{s+1}(x) + \sum_{s=0}^{\{k\}-1} c_s t^{m(k-s)-k-1+m} Q^s(x) \right) \quad (16)$$

Wegen $\{k\} = \{k+1\}$ folgt die Behauptung.

2) Sei $m(k - \{k\}) - k > 0$, dann ist $\{k+1\} = \{k\} + 1$.

Sämtliche Summen in (16) laufen bis $\{k\}$. Damit stimmt

a) auch in diesem Fall.

□

An der Formel in 5.8.a) ist wichtig, daß die Ordnung von t bzw. Q im Nenner für wachsendes k schneller zunimmt als im Zähler.

5.9. Hilfssatz: Ist $|Q(x) + it^m| \geq 1$, so gilt:

$$\left| \left(\frac{t^1}{Q(x) + it^m} \right)^{(k)} \right| \leq |Q(x) + it^m|^{-d} \frac{\sum_{s=0}^1 c_s |t|^{1-s}}{|Q(x) + it^m|^2}$$

falls $k = bm$, $b \in \mathbb{N}$, $b \geq d + m + 2$, $1 \leq m - 1$.

Beweis: Ist $k = bm$, so folgt aus 5.8. mit

$$\begin{aligned} |Q^s(x) (t^m)^{\{k-i\}-s}| &\leq \tilde{c}_{\{k-i\}} |Q(x) + it^m|^{\{k-i\}} : \left| \left(\frac{t^1}{Q(x) + it^m} \right)^{(k)} \right| \leq \\ &\leq \sum_{i=0}^1 |t^{1-i} c_i| \sum_{s=0}^{\{k-i\}} c_s \left| \frac{Q^s(x) t^{m(k-i-s)-(k-i)}}{(Q(x) + it^m)^{k-i+1}} \right| \leq \\ &\leq \sum_{i=0}^1 c_i \tilde{c}_{\{k-i\}} |t^{1-i} t^{m(k-\{k\})-k}| \sum_{s=0}^{\{k-i\}} c_s \left| \frac{(Q(x) + it^m)^{\{k-i\}}}{(Q(x) + it^m)^{k-i+1}} \right| \\ &\leq \sum_{i=0}^1 c_i \tilde{c}_{\{k-i\}} |t^{m(k-\{k\})-k+1-i}| |Q(x) + it^m|^{m-b} = \\ &= \sum_{i=0}^1 c_i |t|^{1-i} |Q(x) + it^m|^{m-b} \end{aligned}$$

Für $b - m \geq 2 + d$, d.h. $b \geq m + d + 2$ folgt die Behauptung.

□

5.10. Hilfssatz: Sei $\check{E}$ eine mit Hilfe der Hörmander'schen

Treppe konstuierte Fundamentallösung von $t_P(D)$

(vgl. 5.2.), dann gilt:

$$\bigwedge_{0 \leq l \leq m-1} \bigwedge_{a \in \mathbb{N}_0^n} \bigvee_{k \in \mathbb{N}} \sup_{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathbb{R}^n} |(\mathcal{D}_x^a \mathcal{D}_t^l \check{E}(x,t)) t^k| < \infty$$

Beweis: Da $\check{E}$ auf $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ unendlich oft differenzierbar ist,

ist nur zu zeigen:

$$\sup_{\substack{(\tau, \zeta) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathbb{R}^n \\ S \in \mathcal{N}}} |(\mathcal{D}_x^a \mathcal{D}_t^l \check{E}(x,t)) t^k, \sigma_{S,\tau}(t) \sigma_{S,\zeta}(x)| < \infty$$

$$\begin{aligned} & \langle \mathcal{D}_x^a \mathcal{D}_t^l \check{E}(x,t) t^k, \sigma_{S,\tau}(t) \sigma_{S,\zeta}(x) \rangle = \\ & = \langle \check{E}(x,t), \frac{\partial^l}{\partial t^l} (t^k \sigma_{S,\tau}(t)) \sigma_{S,\zeta}^{(a)}(x) \rangle \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck besteht aus zwei Integralen (vgl. 5.2.) .

Wir betrachten nur das erste Integral; die Rechnung für das zweite verläuft völlig analog.

$$\begin{aligned} C_1 \int_{\mathbb{B}} x^a \hat{\sigma}_{S,\zeta}(x) \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\sigma_{S,\tau}(t) t^k} \frac{t^l}{Q(x)+it^m} dt dx = \\ C_1 \int_{\mathbb{B}} x^a \hat{\sigma}_{S,\zeta}(x) \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\sigma}_{S,\tau}(t) \left(\frac{t^l}{Q(x)+it^m} \right)^{(k)} dt dx \end{aligned} \quad (17)$$

Da $\hat{\sigma}_{S,\tau}$ zu S gehört, konnten wir partiell integrieren.

Sei nun d_j so groß, daß $\frac{|x_j|^{a_j}}{|Q(x)| d_j} \leq C (x_j^2 + 1)$ für $x \in B$

und $1 \leq j \leq n$ (z.B. $d_j \geq \frac{a_j+2}{m r_j}$, r_j aus 1.5.), und setze

$d := \sum_{j=1}^n d_j$. Wählt man k nach 5.9., so folgt:

$$(17) \leq C_2 \int_{\mathbb{B}} \prod_{j=1}^n \frac{|x_j|^{a_j}}{|Q(x)| d_j} |\hat{\sigma}_{S,\zeta}(x)| \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sum_{i=0}^l c_i |t|^{l-i}}{|Q(x)+it^m|^2} |\hat{\sigma}_{S,\tau}(t)| dt dx \leq$$

$$\leq C_3 \prod_{j=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} (x_j^2 + 1)^{-1} dx_j \int_{\mathbb{R}^n} |\sigma_{s,f}(x)| dx \int_{-\infty}^{\infty} |\sigma_{s,\tau}(t)| dt \leq C_4 < \infty$$

Nach einer ähnlichen Rechnung für den zweiten Summenterm folgt 5.10.

□

5.11. Satz: Ist $u \in \mathcal{E}_{t_P}(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathbb{R}^n)$ distributionell fortsetzbar auf $\mathbb{R}^{n+1}$, so ist u lokal langsam wachsend, d.h.

$$\bigwedge_{s,s' \in \mathbb{N}} \bigvee_k \sup_{\substack{|x| \leq s \\ 0 < |t| \leq s'}} |u(x,t)t^k| < \infty$$

Beweis: Sei $t_P(D)\bar{u} = \sum_{i=0}^{m-1} H_i \otimes \sigma_t^{(i)}$ (nach 5.1.) und

$M_s := \{x \mid |x| \leq s\}$. Wie im Beweis von 5.4. schon erwähnt, werden die H_i auf M_s durch $D^a f_i$ (f_i stetig mit kompaktem Träger) gegeben. u unterscheidet sich auf $\dot{M}_s \times \mathbb{R}$ von

$$\tilde{u} := \sum_{i=0}^{m-1} (D^a f_i \otimes \sigma_t^{(i)}) * \check{E} \text{ nur um eine Funktion aus } \mathcal{E}_{t_P}(\dot{M}_s \times \mathbb{R}).$$

$$\text{Es folgt: } |t^k (\sum_{i=0}^{m-1} (D^a f_i \otimes \sigma_t^{(i)}) * \check{E})(\xi, t)| \leq$$

$$\leq \sum_{i=0}^{m-1} |((f_i \otimes \sigma_t) * \check{E}^{(a)(i)})(\xi, t)t^k| \leq$$

$$\leq \sum_{i=0}^{m-1} \int |f_i(x)| \check{E}^{(a)(i)}(\xi - x, t)t^k |dx \leq \sum_{i=0}^{m-1} c_i \int |f_i(x)| dx < \infty,$$

falls $t \neq 0$ und k groß genug ist für a und alle i , $|f_i| \leq s$.

$$\text{Damit gilt auch für } u: \sup_{\substack{|x| \leq s \\ 0 < |t| \leq s'}} |u(x,t)t^k| < C < \infty$$

□

5.12. Umkehrung: Ist u lokal langsam wachsend auf $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathbb{R}^n$, so ist u auf $\mathbb{R}^{n+1}$ distributionell fortsetzbar.

$$\text{Beweis: Sei } F_s(x,t) := \begin{cases} \int_1^t u(x,\tau)(d\tau)^{k(s)+1} & , t > 0 \\ \int_{-1}^t u(x,\tau)(d\tau)^{k(s)+1} & , t < 0 \end{cases}$$

ein $k(s)+1$ -faches Integral von u von 1 bzw. -1 aus ($k(s)$ zu s wie in 5.11.) . Man zeigt leicht, daß F_s sich stetig in eine Umgebung von $t=0$ hinein fortsetzen läßt zu $\overline{F}_s$. Wegen $D_t^{k(s)+1} \overline{F}_s|_{\dot{M}_s \times (R^+ \cup R^-)} = u|_{\dot{M}_s \times (R^+ \cup R^-)}$ ist $D_t^{k(s)+1} \overline{F}_s$ eine Fortsetzung von u auf $\dot{M}_s \times R$. Damit ist u auch auf R^{n+1} fortsetzbar (vgl. [11]) .

□

Zum Abschluß soll $\mathcal{E}_{t_{P,D}}$ so topologisiert werden, daß die in 5.5. definierte Abbildung T^m ein topologischer Homomorphismus wird. Die Topologisierung verläuft ähnlich wie in [18] .

5.13. Definition: a) Sei $O_s := \{ (x,t) \mid |x| < s, 0 < |t| < s \}$ und

$$\mathcal{E}_{s,k} := \left\{ u \in \mathcal{E}_{t_P}(O_s) \mid \sup_{(x,t) \in O_s} |u(x,t) t^k| < \infty \right\} \text{ für } k, s \in \mathbb{N}$$

$$\mathcal{E}_s := \bigcap_k \mathcal{E}_{s,k}$$

$\mathcal{E}_{t_{P,D}}$ werde mit der Topologie des projektiven Limes über alle $\mathcal{E}_s$ versehen.

b) Sei $\|u\|_{O,k,s} := \sup_O |u(x,t) t^k (s^2 - t^2)^k (s^2 - \sum_{j=1}^n x_j^2)^k|$

$$\tilde{\mathcal{E}}_{s,k} := \left\{ u \in \mathcal{E}_{t_P}(O_s) \mid \|u\|_{O,k,s} < \infty \right\}$$

$\tilde{\mathcal{E}}_s$ und $\tilde{\mathcal{E}}_{t_{P,D}}$ seien analog zu a) definiert.

5.14. Satz: a) $\mathcal{E}_s$ ist separiert.

b) $\tilde{\mathcal{E}}_s$ ist ein vollständiger (DS)- und (M)-Raum.

c) $\mathcal{E}_{t_{P,D}}$ ist topologisch isomorph zu $\tilde{\mathcal{E}}_{t_{P,D}}$,

insbesondere ist $\mathcal{E}_{t_{P,D}}$ ein vollständiger (S)-Raum (Schwartz-Raum) .

Beweis: a) Wegen $\sup_{O_s} |u(x,t)t^{k+1}| \leq s \sup_{O_s} |u(x,t)t^k|$

ist die Einbettung $\mathcal{E}_{s,k} \hookrightarrow \mathcal{E}_{s,k+1}$ stetig. Da die Punktauswertungen stetig sind, ist $\mathcal{E}_s$ separiert.

b) Zeige: $\tilde{\mathcal{E}}_{s,k} \hookrightarrow \tilde{\mathcal{E}}_{s,k+1}$ ist kompakt

Beweis: Da die Einbettungen $\tilde{\mathcal{E}}_{s,k} \hookrightarrow C(O_s)$ bzw. $C^\infty(O_s)$

stetig sind (beide Topologien stimmen ja auf $\mathcal{E}_P(O_s)$ überein), existiert zu jeder Folge u aus der Einheitskugel des Banachraums $\tilde{\mathcal{E}}_{s,k}$ eine Teilfolge u_i , die in $C(O_s)$ konvergiert ($C^\infty(O_s)$ ist ein (M)-Raum, das Bild der Einheitskugel von $\tilde{\mathcal{E}}_{s,k}$ ist also relativ kompakt), d.h.

$\sup_{(x,t) \in K} |u_i(x,t) - u_1(x,t)| \leq \varepsilon$, für K kompakt in O_s ,

$i, l \geq N(K, \varepsilon)$; also gilt:

$\|u\|_{O_s, k, s} \leq \|u\|_{O_s, \varepsilon, k, s} + \|u\|_{O_s \setminus O_{s, \varepsilon, k, s}}$, wobei

$O_{s, \varepsilon} := \{(x, t) \in O_s \mid |x| \leq s - \varepsilon, \varepsilon \leq |t| \leq s - \varepsilon\}$;

nun gilt auf O_s : $(s^2 - \sum_{j=1}^n x_j^2)^{k+1} |t|^{k+1} (s^2 - t^2)^{k+1} \leq s^{2(k+1)}$

Auf $O_s \setminus O_{s, \varepsilon}$ sind zwei der Faktoren von $(s^2 - \sum_{j=1}^n x_j^2) |t| (s^2 - t^2)$

jeweils kleiner als s^2 , während

$(s^2 - \sum_{j=1}^n x_j^2) \leq s^2 - (s - \varepsilon)^2 = 2\varepsilon s - \varepsilon^2 < 2\varepsilon s$ oder

$|t| \leq \varepsilon \leq 2\varepsilon s$. Insgesamt haben wir auf $O_s \setminus O_{s, \varepsilon}$ die

Ungleichung: $(s^2 - \sum_{j=1}^n x_j^2) |t| (s^2 - t^2) \leq 2\varepsilon s^5$

Dies ergibt:

$\|u\|_{O_s, k+1, s} \leq s^{5(k+1)} \sup_{O_{s, \varepsilon}} |u_i(x, t) - u_1(x, t)| + 2\varepsilon s^5 \|u\|_{O_s \setminus O_{s, \varepsilon, k, s}}$

Sind i und l genügend groß, so ist dieser Ausdruck kleiner als $s^{5(k+2)}\varepsilon$, die u_i sind also eine Cauchyfolge in $\tilde{\mathcal{E}}_{s,k+1}$. Die Einbettung $\tilde{\mathcal{E}}_{s,k} \hookrightarrow \tilde{\mathcal{E}}_{s,k+1}$ ist damit (folgen)kompakt.

Wir haben in Wirklichkeit nachgerechnet, daß auf den in $\tilde{\mathcal{E}}_{s,k}$ beschränkten Mengen die Topologien von $\tilde{\mathcal{E}}_{s,k+1}$ und $C(O_s)$ übereinstimmen. $\tilde{\mathcal{E}}_s$ ist also ein (DS)-Raum und $\tilde{\mathcal{E}}_{t_P, D'}$ ein vollständiger (S)-Raum.

c) Es ist zu zeigen, daß das folgende Diagramm nur stetige Abbildungen enthält:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathcal{E}}_s & \xrightarrow{\quad} & \tilde{\mathcal{E}}_{s-1} \\ \downarrow \ell_1 & \nearrow \ell_2 & \downarrow \ell_3 \\ \mathcal{E}_{s-1} & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{E}_{s-2} \end{array}$$

$(s^2 - \sum_{j=1}^n x_j^2)^k (s^2 - t^2)^k$ ist auf O_{s-1} größer gleich $(2s-1)^{2k}$, und deshalb $\sup_{O_{s-1}} |u(x,t)t^k| \leq \|u\|_{O_{s,k,s}}$.

l_1 ist also eine stetige Abbildung von $\tilde{\mathcal{E}}_{s,k}$ nach $\mathcal{E}_{s-1,k}$. l_1 ist damit auch von $\tilde{\mathcal{E}}_{s,k}$ nach $\mathcal{E}_{s-1}$ und von $\tilde{\mathcal{E}}_s$ nach $\mathcal{E}_{s-1}$ stetig.

Wegen $\|u\|_{O_{s-1,k,s}} \leq \sup_{O_{s-1}} |u(x,t)t^k| s^{4k}$ ist l_2 als Abbildung von $\mathcal{E}_{s-1,k}$ nach $\tilde{\mathcal{E}}_{s-1,k}$ stetig. Dann ist l_2 auch stetig von $\mathcal{E}_{s-1}$ nach $\tilde{\mathcal{E}}_{s-1}$.

□

5.15. Satz: a) $T^m : \mathcal{E}_{t_P, D'} \longrightarrow \prod_{i=0}^{m-1} D'(R^n)$ ist stetig.

b) T^m ist offen.

Beweis: a) Sei $B_{s,k}$ die Einheitskugel in $\mathcal{E}_{s,k}$;

für das m-fache Integral in t-Richtung (von 1 aus) über die Funktionen aus $B_{s,k}$ gilt dann:

$$\sup_{\substack{(x,t) \in K_{\mathcal{E}} \\ u \in B_{s,k}}} \left| \int_1^t u(x,t)(dt)^m t^{k-m} \right| < C < \infty \quad (18)$$

wobei $K_{\mathcal{E}} := \{ (x,t) \mid 0 < t < s, |x| \leq s-\varepsilon \}$.

Mit Hilfe von 4.7.a) läßt sich erreichen, daß

$F^+ + \int_1^t u(x,t)(dt)^m$ zu $\mathcal{E}_{t_P}(O_s)$ gehört, da O_s t_Q -konvex

ist. Außerdem ist diese Funktion wieder ein m-faches

Integral von u (in t-Richtung), und F^+ läßt sich stetig

in eine Umgebung von $t=0$ hinein fortsetzen.

Die Funktionen aus $B_{s,k}$ sind auf $\{ (x,1) \mid |x| \leq s-\varepsilon \}$

gleichmäßig beschränkt. Da $M_s := \{ x \mid |x| < s \}$ t_Q -konvex ist,

ist $t_Q(D)$ offen als Abbildung von $C^\infty(M_s)$ auf $C^\infty(M_s)$.

$C^\infty(M_s) \xrightarrow[t_Q(M_s)]{t_Q(D)} C^\infty(M_s)$ ist ein topologischer

Isomorphismus. Man kann deshalb für eine in $C^\infty(M_s)$

beschränkte Menge zu jeder Halbnorm ein Urbild finden,

das bezüglich dieser Halbnorm beschränkt ist.

Damit läßt sich sogar erreichen, daß $F^+ + \int_1^t u(x,t)(dt)^m$ die Abschätzung (18) erfüllt.

Durch Iteration erhält man:

Für die Funktionen u in $B_{s,k}$ existiert ein lm-faches

Integral $u^{(-1m)}$ in t-Richtung, das zu $\mathcal{E}_{t_P}(O_{s-1})$ gehört

und $\sup_{\substack{u \in B_{s,k} \\ 0 \leq t \leq s-1}} |u^{(-1m)}(x,t)| \leq C < \infty$ erfüllt.

$$\begin{aligned} \text{Nun folgt: } & \left| \lim_{t, t' \downarrow 0} \int (u(x, t) - u(x, -t')) g(x) dx \right| = \\ & = \left| \lim_{t, t' \downarrow 0} (-i)^{l(m+1)} \int (u^{(-lm)}(x, t) - u^{(-lm)}(x, -t')) Q^1(D) g(x) dx \right| \\ & \leq 2C \sup_{\substack{\bar{M}_{s-1} \\ |a| \leq k}} |g^{(a)}(x)| \quad (k = \text{Grad } Q) . \end{aligned}$$

Damit ist das Bild einer beschränkten Menge in $D(\bar{M}_{s-1})$ gleichmäßig beschränkt für $u \in B_{s,k}$.

T_0 überführt also beschränkte Mengen in $\mathcal{E}_{s,k}$ in beschränkte Mengen in $D'_b(\bar{M}_{s-1})$ und ist damit stetig von $\mathcal{E}_{t_P, D}$ nach $D'(\mathbb{R}^n)$.

Ist u als Distribution auf $\bar{O}_s$ fortsetzbar, so auch $\frac{\partial}{\partial t} u$. $\frac{\partial}{\partial t} u$ erfüllt also auf O_{s-1} eine Abschätzung $\sup_{O_{s-1}} |u(x, t) t^k| < \infty$.

Die Zuordnung: $u \longrightarrow \frac{\partial}{\partial t} u|_{O_{s-1}}$ definiert also eine Abbildung von $\tilde{\mathcal{E}}_s$ nach $\tilde{\mathcal{E}}_{s-1}$. Ihr Graph ist abgeschlossen, da aus beiden Topologien die gleichmäßige Konvergenz auf kompakten Teilmengen von O_{s-1} folgt.

Da $\tilde{\mathcal{E}}_s$ und $\tilde{\mathcal{E}}_{s-1}$ ultrabornologische (LF)-Räume sind, ist die Abbildung stetig.

Die Ableitung $\frac{\partial}{\partial t}$ ist also stetig von $\tilde{\mathcal{E}}_{t_P, D}$ nach $\tilde{\mathcal{E}}_{t_P, D'}$ ($\mathcal{E}_{t_P, D}$ nach $\mathcal{E}_{t_P, D'}$).

$T^m = c(T_0 \circ \frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}}, \dots, T_0 \circ \frac{\partial}{\partial t}, T_0)$ ist somit eine stetige Abbildung von $\mathcal{E}_{t_P, D}$ nach $\prod_{i=0}^{m-1} D'(\mathbb{R}^n)$.

b) T^m ist stetig und surjektiv. Da $D'(\mathbb{R}^n)$ induktiver Limes von Banachräumen ist, und $\mathcal{E}_{t_P, D}$ durch Bildung abzählbarer induktiver bzw. projektiver Limites aus Banachräumen entsteht, ist T^m nach dem Raikov'schen Graphensatz offen ([13]).

VI. Randwerte für $m \neq \text{Grad } Q$

Bei der Behandlung des distributionellen Randwertes im vorigen Kapitel wurde schon auf die Bedingung $m = \text{Grad } Q$ verzichtet. Es soll nun untersucht werden, welche Ergebnisse die Theorie der P-Funktionale bzw. Randwerte (Kapitel II. und III.) für $m \neq \text{Grad } Q$ erbringt.

Sei zunächst m kleiner als $\text{Grad } Q$.

Dann sind für alle t die Vektoren (x_0, t) charakteristisch bzgl. P , falls x_0 bzgl. Q charakteristisch ist. Sämtliche Hyperebenen, die den $\mathbb{R}^n$ in einer bzgl. Q charakteristischen Ebene schneiden, sind also charakteristisch bzgl. P (ebenso der $\mathbb{R}^n$). Damit dürfte es schwierig sein, relativ P -konvexe Umgebungsbasen für beliebige kompakte Mengen im $\mathbb{R}^n$ anzugeben, falls der Hauptteil von Q eine von Null verschiedene reelle Nullstelle besitzt. Die Elemente aus $\mathcal{E}'_P(K)$ lassen sich dann für verschiedene K nicht mehr identifizieren, und ein P -Funktional mit kompaktem Träger kann nicht mehr definiert werden. Es ist ebenfalls nicht mehr klar, ob die Randwerte eine Garbe bilden. Die Konstruktion der Paragraphen I.-III. läßt sich also wohl kaum durchführen.

Ist Q elliptisch, so liegt der Fall anders. Dann ist nämlich $(0, t)$ der einzige charakteristische Vektor, d.h. der $\mathbb{R}^n$ ist die einzige charakteristische Hyperebene von P . Da Q semielliptisch ist ($r_Q = (1, \dots, 1)$), ist auch P semielliptisch mit $r_P = (1, \dots, 1, \frac{\text{Grad } Q}{m})$.

Wie in 2.1. weist man nach, daß alle offenen Mengen der Form $o_x(-c, c)$ (relativ) P-konvex sind.

Das Cauchy-Problem (6) mit Daten auf dem $\mathbb{R}^n$ ist nicht eindeutig lösbar. Die Einschränkungabbildung ϕ (S.52) hat also einen nichttrivialen Kern. Wie im Beweis 1.8.b) sieht man (durch "Auseinanderziehen" in t-Richtung), daß dieser im Kern $\mathcal{N}(K)$ der Topologie von $\mathcal{E}_P(K)$ enthalten ist. $\mathcal{E}_P(K)$ ist also nicht separiert.

Liegt f in $\mathcal{N}(K)$, so gilt $D^s f(x, 0) = 0$ für $x \in K$ und $a \in \mathbb{N}^{n+1}$. Da $\frac{\partial^c}{\partial t^1} f(x, 0)$ von x reell-analytisch abhängt, verschwindet $\frac{\partial^c}{\partial t^1} f(x, 0)$ auf einer Umgebung von K . f gehört damit zum Kern von 0 . $\mathcal{N}(K)$ stimmt also mit dem Kern von 0 überein.

Nun lassen sich wie in Kapitel II. und III. P-Funktionale und Randwerte definieren. Der Beweis der Isomorphie beider Konstruktionen ergibt sich jedoch wesentlich direkter als in Kapitel III. Entscheidend war dort die Bedingung, daß $\mathcal{E}_P^1(\partial K)$ dicht liegt in $\mathcal{E}_P^1(K_c)$ für eine genügend große Klasse kompakter Mengen K (Satz 3.6.a)). Dies läßt sich in unserem Fall für beliebige Kompakta K , $K = \overline{K}$, direkt zeigen. Ist nämlich $\{o_s\}$ eine Umgebungsbasis von K_c nach 2.1., und gehört f zu $\mathcal{N}(\partial K)$, so verschwindet $\frac{\partial^c}{\partial t^1} f(x, 0)$ auf o_s , falls jede Zusammenhangskomponente von o_s Punkte aus ∂K enthält, da f analytisch in x -Richtung ist. f gehört damit zum Kern von ϕ (bzgl. K_c) und daher zu $\mathcal{N}(K_c)$. Das Analogon zu 3.6.a) ist also bewiesen, und 3.6.b) bzw. 3.8. lassen sich für beliebige

K bzw. 0 herleiten.

Die P-Funktionale sind also in unserem Fall eine welke Garbe. Eine nähere Klassifizierung der Garbe der P-Funktionale wie in Kapitel II. wird durch die Tatsache erschwert, daß der $\mathbb{R}^n$ eine charakteristische Hyperebene ist und die Nulllösungen von P in t-Richtung nicht mehr analytisch sind. Es läßt sich deshalb weder mit dem Cauchy - Kowalewski - Theorem noch mit der Formel (8) der Lösungsraum für das Cauchy-Problem exakt bestimmen.

Für einen elliptischen Operator auf dem $\mathbb{R}^n$ kann indes mit Hilfe dieser Randwerte eine besonders einfache explizite welke Auflösung von $\mathcal{E}_{t_Q}$ angegeben werden.

6.1. Satz: Sei Q ein elliptisches Polynom mit reellen konstanten Koeffizienten auf dem $\mathbb{R}^n$ und

$P(x,t) := Q(x) + it$. Dann stellt folgendes eine welke Auflösung von $\mathcal{E}_{t_Q}$ dar:

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}_{t_Q}(0) \xrightarrow{i} \frac{\mathcal{E}_{t_P}(0 \setminus 0)}{\mathcal{E}_{t_P}(0)} \xrightarrow{t_Q} \frac{\mathcal{E}_{t_P}(0 \setminus 0)}{\mathcal{E}_{t_P}(0)} \longrightarrow 0$$

$$i \text{ wird gegeben durch } (if)(x,t) := \begin{cases} f(x) & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Beweis: i bettet $\mathcal{E}_{t_Q}(0)$ in $\frac{\mathcal{E}_{t_P}(0 \setminus 0)}{\mathcal{E}_{t_P}(0)}$ ein. Ist näm-

lich if in diesem Raum Null, dann gehört if zu $\mathcal{E}_{t_P}(0)$, ist also unendlich oft differenzierbar und verschwindet damit auf 0. Nach 4.6.a) ist t_Q surjektiv. Wie in 4.5. folgt Bild i = Kern $t_Q(D)$.

Damit ist der Satz bewiesen.

□

Weit interessanter ist der Fall, daß m größer als Grad Q ist. P ist auch in diesem Fall wieder hypoelliptisch. Zur Identifizierung der auftretenden Räume (vgl. 2.7. und 2.8.) werden wir wiederum eine Bedingung brauchen, die die Analytizität der Nulllösungen von $P(D)$ in t -Richtung sichert. Sei $r_P = (r_x, r_t)$; wie in 1.1. zeigt man, daß $r_t = 1$ äquivalent ist mit der Bedingung (2). Diese ist wieder gleichbedeutend mit $|Q(x)|^{\frac{1}{m}} \leq C d_Q(x)$. Je größer m ist, umso schwächer werden diese Bedingungen.

Wegen $|x|^c \leq d_Q(x)$ (für ein $c > 0$ folgt für $\frac{\text{Grad } Q}{m} < c$:

$$|Q(x)|^{\frac{1}{m}} \leq C |x|^{\frac{\text{Grad } Q}{m}} \leq C |x|^c \leq C' d_Q(x).$$

m läßt sich also zu Q so groß wählen, daß Q die Bedingung (2) erfüllt. Die folgende Bedingung ist somit äquivalent zur Hypoelliptizität: Es existiert ein m , sodaß die Nulllösungen von $P(D)$ in t -Richtung analytisch sind, und $|Q(x)| \rightarrow \infty$ für $|x| \rightarrow \infty$.

Es gilt in jedem Fall: $r_x \leq r_Q k$ (Beweis analog zu 1.1.).

Sei andererseits $a = (0, \dots, 0, m)$ und

$$\frac{|P^{(a)}(x, t)|}{|P(x, t)|} = \frac{m!}{|P(x, t)|} \leq C |x_j|^{-\frac{m}{r_j^{\frac{1}{c}}}} \quad \text{für große } |x_j|$$

(r_j sei die j -te Koordinate von r_Q). Mit $t = 0$ folgt:

$$|Q(x)|^{-1} \leq C |x_j|^{-\frac{m}{r_j^{\frac{1}{c}}}} \quad \text{und damit } |x_j|^{-\frac{m}{r_j^{\frac{1}{c}}}} \leq |x_j|^{-\frac{\text{Grad } Q}{r_j^{\frac{1}{c}}}}.$$

Also ist $c \geq \frac{m}{\text{Grad } Q} = k$ und $r_x = r_Q k$.

Die Nulllösungen von $P(D)$ sind also in keine Richtung des $\mathbb{R}^n$ reell-analytisch.

6.2. Definition: Sei $M_s := \{ x \mid |x| \leq s \}$;

$$a) D_P(M_s) := \left\{ f \in \mathcal{E}_P(\mathbb{R}^n \times (-\frac{1}{s}, \frac{1}{s})) \mid \text{Tr } f \in M_s \times (-\frac{1}{s}, \frac{1}{s}) \right\}$$

werde aufgefaßt als Teilraum von $\mathcal{E}_P(\mathbb{R}^n \times (-\frac{1}{s}, \frac{1}{s}))$.

$$b) D_P(\mathbb{R}^n) := \bigcap_s D_P(M_s)$$

6.3. Satz: a) $D_P(M_s)$ ist ein (FS)-Raum (speziell ein (M)-Raum).

b) $D_P(\mathbb{R}^n)$ ist ein (DS)-Raum.

Beweis: a) Es ist nur zu zeigen, daß $D_P(M_s)$ abgeschlossen ist in $\mathcal{E}_P(\mathbb{R}^n \times (-\frac{1}{s}, \frac{1}{s}))$; dies ist klar.

b) Wir zeigen, daß die Einbettung von $D_P(M_s)$ nach $D_P(M_{s+1})$ kompakt ist. Sei $V := \left\{ f \in D_P(M_s) \mid \sup_{\substack{|x| \leq s+1 \\ |t| \leq (s+1/2)^{-1}}} |f(x,t)| \leq 1 \right\}$;

Dann ist V eine Nullumgebung in $D_P(M_s)$, die in $D_P(M_{s+1})$ beschränkt, also relativ kompakt ist. □

Bis jetzt ist noch nicht klar, ob es nichttriviale Funktionen in $D_P(\mathbb{R}^n)$ gibt.

Sei $D(Q(D), k; K, C)$ der Raum aller Funktionen aus $E(Q(D), k; \mathbb{R}^n, C)$ mit Träger in K.

Sei $D_P(Q(D), k; o) := \bigcap_{K \subset O} (\bigcap_{C \subset \mathbb{R}^n} D(Q(D), k; K, C))$. Der folgende

Satz gibt u.a. für Polynome mit der Bedingung (2) eine genaue Charakterisierung von $D_P(\mathbb{R}^n)$ analog zu 2.7. und 2.8.

6.4. Satz: a) Sei $k' = (k, \dots, k)$ und $\Phi(f)$ die Einschränkung

auf die Cauchydaten von f (wie in Kapitel IV.);

dann ist $\bigcap_{i=0}^{m-1} D(a^{k'} a, \mathbb{R}^n)$ in $\Phi(D_P(\mathbb{R}^n))$ enthalten.

- b) Erfüllt Q die Bedingung (2), so ist $D_P(\mathbb{R}^n)$ topologisch isomorph zu $\prod_{i=0}^{m-1} D(Q(D), k; \mathbb{R}^n)$.
- c) Ist Q semielliptisch, so ist $D_P(\mathbb{R}^n)$ topologisch isomorph zu $\prod_{i=0}^{m-1} D(a^{kr_Q a}, \mathbb{R}^n)$.

Beweis: a) Wie in 2.8.b) beweist man:

$$\sup_{\substack{x \in K \\ l \in \mathbb{N}}} \frac{|l^1(n)f(x)|}{C^{lm}(lm)^{lm}} \leq \sup_{\substack{x \in K \\ a \in \mathbb{N}^n}} \frac{|l^{a_1} f(x)|}{C^{la_1} a^{ka_1}} \quad \text{Hieraus folgt die Kon-}$$

vergenz des Ansatzes (8) für (f_i) aus $\prod_{i=0}^{m-1} D(a^{k'a}, \mathbb{R}^n)$.

b) Zunächst konvergiert der Ansatz (8) in einer Umgebung von $\mathbb{R}^n$ für jede Funktion aus $D(Q(D), k; \mathbb{R}^n)$. Π ist also auf $\prod_{i=0}^{m-1} D(Q(D), k; \mathbb{R}^n)$ definiert und stetig (vgl. 2.5.).

$$\sup_{\substack{x \in K \\ l \in \mathbb{N}}} \frac{|l^1(n)f(x)|}{C^{lm}(lm)^{lm}} = \sup_{\substack{x \in K \\ l \in \mathbb{N}}} \frac{|l^{lm} f(x)|}{C^{lm}(lm)^{lm}}$$

als Abbildung von $D_P(K)$ nach $\prod_{i=0}^{m-1} D(Q(D), k; \mathbb{R}^n)$ stetig.

Hiermit folgt b).

c) Wegen $r_x = kr_Q$ folgt die algebraische Isomorphie wie in 2.8. Mit $D_P(\mathbb{R}^n)$ ist auch $D(Q(D), k; \mathbb{R}^n)$ ein (DS)-Raum, ebenso wie $D(a^{kr_Q a}, \mathbb{R}^n)$. Wir können also den Satz vom abgeschlossenen Graphen sowie den Satz von der offenen Abbildung anwenden. Damit folgt leicht die topologische Isomorphie.

□

Die Ankoppelung mit $m > \text{Grad } Q$ führt also gerade zu den verallgemeinerten nicht quasianalytischen Gevrey-Klassen bzw. den nicht quasianalytischen Klassen $D(a^{r_Q k a}, \mathbb{R}^n)$.

Da die Mengen von 2.1. wieder tP -konvex sind, lassen sich die Randwerte von tP wie in Kapitel III. definieren.

Nach 6.4.a) enthält $D_P(\mathbb{R}^n)$ Funktionen mit beliebig kleinem Träger (in x -Richtung). $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathbb{R}^n \cup o$ ist deshalb für keine offene Menge o im $\mathbb{R}^n$ tP -konvex. Ist nämlich f eine Funktion aus $D_P(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{E}_P(\mathbb{R}^n \times (-c, c) \setminus \mathbb{R}^n \cup o)$, deren Träger ∂o berührt, so läßt sich ein g aus $D(\mathbb{R})$ finden, sodaß fg in $D(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathbb{R}^n \cup o)$ liegt und $\text{Tr } fg \partial o$ berührt, während $\text{Tr}(P(D) fg)$ in $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathbb{R}^n \cup o$ liegt. Diese Menge ist also nicht tP -konvex und da er können von keiner offenen Menge o aus alle Randwerte auf $\mathbb{R}^n$ fortgesetzt werden (3.2.).

Die Bedeutung der tP -konvexen Mengen für die Fortsetzbarkeit der Randwerte geht also verloren. Dies überrascht nicht, da die charakteristischen Vektoren von Q keinen Einfluß auf die charakteristische Vektoren von P haben.

□

Unser Ziel ist es, eine Dualität zwischen den Randwerten von tP und $D_P(\mathbb{R}^n)$ zu beweisen. Dies wird mit Satz 6.4.c) zu einer Charakterisierung gewisser Ultradistributionsklassen als volle Randwerträume semieллиptischer Differentialoperatoren führen.

6.5. Hilfssatz: Seien B_1, B_2 konzentrische offene Kreise,

$\overline{B}_1 \subset \overline{B}_2 \subset o'$, und u ein Randwert von tP auf o' .

Dann gibt es einen Randwert u' mit kompakter Singularitätenmenge in $\overline{B}_2$, der auf B_1 mit u übereinstimmt.

Beweis: Sei o ein weiterer konzentrischer Kreis mit

$\overline{B}_1 \subset o \subset \overline{o} \subset B_2$ und $O := o \times (-c, c)$. Dann ist u auf o definiert

durch eine Funktion $f \in \mathcal{E}_{t_P}(O \setminus \bar{O})$. Seien $\varphi, g, g^{\pm}, O^{\pm}$ wie in 3.8. definiert. Da O^+ und O^- wieder t_P -konvex sind, läßt sich ein $h \in D'(\bar{O})$ finden, sodaß $t_P(D)h = -g + T_1 + T_2$, wobei $T_i \in D'(\bar{O})$ und $\text{Tr } T_1 \subset O$ sowie $\text{Tr } T_2 \subset \bigcup_{\mathbb{R}^n} \bar{O}$.

Sei $g_1 \in D(O)$, $g_1 \equiv 1$ auf einer Umgebung von $\bar{B}_1$, und $g_2 \in C^\infty(\bigcup_{\mathbb{R}^n} \bar{O})$, $g_2 \equiv 1$ auf einer Umgebung von $\bar{B}_2$ und $g_2 \equiv 0$ auf einer Umgebung von $\bar{O}$. G_i , $i=1,2$, seien Lösungen von $t_P(D)G_i = -g_i T_i$ auf $\mathbb{R}^{n+1}$.

Wir definieren F auf $\bar{O}$ durch $F := \varphi f + h + G_1 + G_2$.

Auf $\bar{B}_2$ gilt: $t_P(D)F = g - g + T_2 - g_2 T_2 = (1 - g_2)T_2 = 0$

Sei O_1 eine Umgebung von B_1 , auf der $\varphi \equiv 1$ ist.

$$F|_{O_1} = f|_{O_1} + (h + G_1 + G_2)|_{O_1}.$$

$$\begin{aligned} \text{Wegen } t_P(D)(h + G_1 + G_2)|_{O_1} &= -g|_{O_1} + (1-g_1)T_1|_{O_1} + (1-g_2)T_2|_{O_1} \\ &= (1-g_1)T_1|_{O_1} = 0 \text{ stimmt } F \text{ auf } B_1 \text{ mit } u \text{ als Randwert} \end{aligned}$$

überein. Damit folgt die Behauptung. $\square$

6.6. Hilfsatz: Sei $1 < \tilde{k} < \frac{m}{m-1}$ und $g \in D(a^{\tilde{k}a}, O)$. Sei Q

ein Polynom, das die Bedingung (2) mit $m' = m-1$ erfüllt, und $f \in \mathcal{E}_P(O)$, $O \cap \mathbb{R}^n = \emptyset$.

Dann ist das Cauchyproblem $F \in \mathcal{E}_P(\mathbb{R}^n \times (-c, c))$,

$$\left(\frac{\partial^i}{\partial t^i} F \right) \Big|_{\mathbb{R}^n} = g \left(\frac{\partial^i}{\partial t^i} f \Big|_O \right), \quad i=0, \dots, m-1,$$

für ein $c \in \mathbb{R}^+$ lösbar. c hängt nur von g und O , nicht aber von f ab. Wir bezeichnen F mit $f \circ g$.

Konvergiert f_s gegen O in $\mathcal{E}_P(O)$, so auch $f_s \circ g$ in $\mathcal{E}_P(\mathbb{R}^n \times (-c, c))$.

Beweis: $|Q^{(a)}(x)| \leq C(1+|Q(x)|)^{\frac{|a|}{m-1}} \leq C(1+|P(x)|)^{\frac{m-1-|a|}{m-1}} \leq$
 $\leq C_1(1+d_P(x,t))^{\frac{(m-1-|a|)m}{(m-1)^2}}$. Diese Ungleichungskette gilt,

da die Bedingung (2) von Q für m-1 und von P für m erfüllt wird. Sei $\{a_1, \dots, a_L\}$ die Menge der Multiindizes, für die $Q^{(a_i)}$ nicht identisch verschwindet. Sei $\bar{m}(|a_i|)$ der L-dimensionale Multiindex $m(\frac{m-1-|a_i|}{m-1})$. Mit einer Verallgemeinerung von Theorem 4.4.1. bzw. 4.4.2. in [6]

folgt nun: Für alle kompakten Mengen K in O gibt es ein C sodaß alle $f \in \mathcal{E}_1(O)$ die folgende Abschätzung erfüllen:

$$\sup_{\substack{x,t \in K \\ b \in \mathbb{N}^L}} \frac{\left| \prod_{j=1}^L (Q^{(a_j)}(D))^{b_j} f(x,t) \right|}{C |b|_b m(|a_i|)^b} < \infty. \quad (19)$$

Unser Ziel ist die folgende Behauptung:

$$\sup_{\substack{x \in K \\ l \in \mathbb{N}}} \frac{|Q^l(D)(f(x,0)g(x))|}{(LC)^{lm}(lm)^{lm}} \leq \quad (20)$$

$$\sup_{\substack{x \in K \\ b \in \mathbb{N}^L}} \frac{\left| \prod_{j=1}^L (Q^{(a_j)}(D))^{b_j} f(x,0) \right|}{C |b|_b m(|a_i|)^b} \sup_{\substack{x \in K \\ a \in \mathbb{N}_0^n}} \frac{|D^a g(x)|}{C |a|_a^{\frac{1}{L}} a^{\frac{1}{L}}}$$

$$a) \left| Q^l(D)(f(x,0)g(x)) \right| \leq \sup_{|b| \leq l} \left| \prod_{j=1}^L (Q^{(a_j)}(D))^{b_j} f(x,0) \right| |D^a g(x)| \leq L^{\frac{1}{L}}$$

$$\text{mit } a = \sum_{j=1}^L a_j b_j.$$

Beweis (durch Induktion): $l = 0$ ist klar. Sei $l = 1$:

$$\left| Q(D)f(x,0)g(x) \right| \leq \sum_{j=1}^L (a_j!)^{-1} \left| Q^{(a_j)}(D)f(x,0) \right| |D^{a_j} g(x)| \leq$$

$$\leq L \sup_{|b| \leq 1} \left| \prod_{j=1}^L (Q^{(a_j)}(D))^{b_j} f(x,0) \right| |D^a g(x)| \quad \text{mit } a = \sum_{j=1}^L a_j b_j.$$

Sei die Behauptung für 1 gezeigt.

$$\begin{aligned}
 & |Q^{l+1}(D)(f(x,0)g(x))| = |Q^l(D)(Q(D)(f(x,0)g(x)))| \leq \\
 & \leq L \sup_{|d| \leq \text{Grad } Q} |Q^l(D)(Q^{(d)}(D)f(x,0) D^d g(x))| \leq \\
 & \leq L^{l+1} \sup_{|d| \leq \text{Grad } Q} \left| \prod_{j=1}^l (Q^{(a_j)}(D))^{b_j} Q^{(d)}(D)f(x,0) \right| |D^d g(x)| = \\
 & = \sup_{|b| \leq l+1} \left| \prod_{j=1}^l (Q^{(a_j)}(D))^{b_j} f(x,0) \right| |D^a g(x)| \quad \text{mit } a = \sum_{j=1}^l b_j a_j.
 \end{aligned}$$

$$b) \ C |b|_b \bar{m}(|a_j|) b_a \widetilde{k} a_c |a| \leq$$

$$\begin{aligned}
 & \leq C \sum_{j=1}^l b_j + \sum_{j=1}^l |a_j| b_j \left(\sum_{j=1}^l b_j \right) \bar{m}(|a_j|) b \left(\sum_{j=1}^l |a_j| b_j \right) \widetilde{k} \sum_{j=1}^l |a_j| b_j \leq \\
 & \leq C^{l+1} \cdot \text{Grad } Q_{(l+1 \cdot \text{Grad } Q)} \sum_{j=1}^l b_j \left(m \frac{m-1-|a_j|}{m-1} + \widetilde{k} |a_j| \right) \leq \\
 & \leq C^{lm(lm)} \sup_{|a_j| \leq L} \left(m \frac{m-1-|a_j|}{m-1} + \widetilde{k} |a_j| \right) \text{ für } |b| \leq 1.
 \end{aligned}$$

Nun ist $\frac{m-1-|a_j|}{m-1} m + \widetilde{k} |a_j| \leq m$ genau dann, wenn

$(m-1-|a_j|)m + \widetilde{k}(m-1)|a_j| \leq (m-1)m$, d.h., wenn

$|a_j|(\widetilde{k}(m-1)-m) \leq 0$, d.h. $\widetilde{k} \leq \frac{m}{m-1}$.

Also gilt: $C |b|_b \bar{m}(|a_j|) b_a \widetilde{k} a_c |a| \leq C^{lm(lm)} |a|$ für $|b| \leq 1$.

Hieraus folgt mit a) die Ungleichung (20).

Der Ansatz (8) konvergiert also für die Cauchydaten

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} f(x,0) \right) \Big|_{\mathbb{R}^n \times (-\frac{1}{5LC(\text{Tr } g)}, \frac{1}{5LC(\text{Tr } g)})}$$

gleichmäßig. Konvergiert f_g gegen 0 in $\mathcal{E}_p(0)$, so auch bzgl.

der Halbnorm (19) mit $K = \text{Tr } g$; daher konvergiert $f_g \circ g$ in $\mathcal{E}_p(\mathbb{R}^n \times (-\frac{1}{5LC}, \frac{1}{5LC}))$.

D

Wir definieren nun eine Bilinearform auf

$$D_F(\mathbb{R}^n) \times \frac{\mathcal{E}_P(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathbb{R}^n)}{\mathcal{E}_P(\mathbb{R}^{n+1})}.$$

6.7. Definition: Sei $f \in D_P(M_g)$ und $u \in \mathcal{E}_{t_P}(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathbb{R}^n)$.

Sei $w = w(t) \in D(-\frac{1}{s}, \frac{1}{s})$, $w \equiv 1$ auf einer Umgebung von 0.

Wir definieren: $((f, u)) := \langle P(D)(wf), u \rangle$.

6.8. Satz: a) Die obige Bilinearform ist auf

$D_P(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{E}_{t_P}(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathbb{R}^n)$ getrennt stetig und hängt nicht von w ab.

b) $((f, u)) = 0$ für alle $f \in D_P(\mathbb{R}^n)$, genau dann, wenn u zu $\mathcal{E}_{t_P}(\mathbb{R}^{n+1})$ gehört.

c) $(\mathcal{E}_{t_P}(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathbb{R}^n) / \mathcal{E}_{t_P}(\mathbb{R}^{n+1}))'_b$ ist topologisch iso-

morph zu $D_P(\mathbb{R}^n)$.

d) $(D_P(\mathbb{R}^n))'_b$ ist topologisch isomorph zu $\mathcal{E}_{t_P}(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathbb{R}^n) / \mathcal{E}_{t_P}(\mathbb{R}^{n+1})$

Beweis: a) Die Stetigkeit ist klar. Sei nun $w \equiv 0$ in einer Umgebung von 0. Es folgt: $\langle P(D)(wf), u \rangle = \langle wf, {}^tP(D)u \rangle = 0$.

Die Bilinearform ist also unabhängig von w .

b) Sei $u \in \mathcal{E}_{t_P}(\mathbb{R}^{n+1})$; es folgt: $((f, u)) = \langle P(D)(wf), u \rangle = \langle wf, {}^tP(D)u \rangle = 0$.

Sei nun $((f, u)) = 0$ für alle $f \in D_P(\mathbb{R}^n)$. Wir zerlegen u gemäß 6.5. in $u' + u''$, wobei u' auf B_1 mit u übereinstimmt.

Zu zeigen ist, daß u' äquivalent ist zu einem Element $\bar{u}$ aus

$\mathcal{E}'_P(\overline{B_2} \setminus \overline{B_1})$. Nach 1.7. gehört u' dann zu $\mathcal{E}_{t_P}(\overline{B_2} \setminus \overline{B_1}) / \mathcal{E}_{t_P}(\mathbb{R}^{n+1})$.

u' läßt sich also als Nulllösung von ${}^tP(D)$ auf B_1 fortsetzen. Dasselbe gilt dann aber für u . Da B_1 beliebig war, gehört u zu $\mathcal{E}_{t_P}(\mathbb{R}^{n+1})$.

Sei $\{0_s\}$ eine Umgebungsbasis von $\overline{B_2 \setminus B_1}$ und $f_v \in \mathcal{E}_P(\mathbb{R}^{n+1})$ eine Cauchyfolge in $\mathcal{E}_P(0_s)$. Sei $g \in D(a^{\widetilde{k}a}, 0_s)$, $1 < \widetilde{k} < \frac{m}{m-1}$, $g \equiv 1$ auf einer Umgebung von $\overline{B_2 \setminus B_1}$. $f_v - f_v a g$ hat seinen Träger in $(B_1 \cup (\overline{B_2}) \times (-c, c))$, zerfällt also in einen inneren Teil F_i und einen äußeren Teil F_a . F_i gehört zu $D_P(B_1)$. Also gilt: $0 = ((u, F_i)) = ((u', F_i)) = (u', F_i)$. Da F_a als Element von $\mathcal{E}_P(\overline{B_2})$ verschwindet, ist $(u', F_a) = 0$. Wir haben also gezeigt: $(f_v, u') = (f_v a g, u')$. Dies ist nach 6.6. eine Cauchyfolge in $\mathcal{E}_P(\mathbb{R}^n \times (-c, c))$. Das Bild einer Cauchyfolge in $\mathcal{E}_P(0_s)$ unter u' ist also eine Cauchyfolge in $\mathcal{C}$. u' läßt sich damit zu einer stetigen Abbildung $\bar{u}_s$ auf $\mathcal{E}_P(0_s)$ fortsetzen. Da $\mathcal{E}_P(\mathbb{R}^{n+1})$ dicht in $\mathcal{E}_P(0_s)$ und $\mathcal{E}_P(0_{s+1})$ liegt, sind die $\bar{u}_s$ mit dem Spektrum verträglich und definieren also ein $\bar{u}$ aus $\mathcal{E}'_P(\overline{B_2 \setminus B_1})$, das zu u' äquivalent ist.

c) Mit b) folgt, daß $\mathcal{E}_{tP}(\mathbb{R}^{n+1})$ abgeschlossen ist in $\mathcal{E}_{tP}(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathbb{R}^n)$ (im Gegensatz zum Fall $m = \text{Grad } Q$, wo $\mathcal{E}_{tP}(\mathbb{R}^{n+1})$ dicht in $\mathcal{E}_{tP}(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathbb{R}^n)$ liegt). $\mathcal{E}_{tP}(\mathbb{R}^{n+1})$ ist nämlich gerade der Schnitt der Kerne der stetigen Linearformen $u \longrightarrow ((f, u))$. $\mathcal{E}_{tP}(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathbb{R}^n) / \mathcal{E}_{tP}(\mathbb{R}^{n+1})$ ist also ein (FS)-Raum.

Sei nun T ein Element von $(\mathcal{E}_{tP}(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathbb{R}^n) / \mathcal{E}_{tP}(\mathbb{R}^{n+1}))'$. Dann läßt sich T fortsetzen zu $T_1 \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathbb{R}^n)$ mit $T_1|_{\mathcal{E}_{tP}(\mathbb{R}^{n+1})} = T$. Die Gleichung $T_1 = P(D)H_1$ ist somit in $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^{n+1})$ eindeutig lösbar. H_1 gehört zu $D_P(\mathbb{R}^{n+1})$ und

$$\begin{aligned} \langle T, u \rangle &= \langle P(D)H_1, \widetilde{w}u \rangle = \langle H_1, {}^tP(D)(\widetilde{w}u) \rangle = \langle wH_1, {}^tP(D)(\widetilde{w}u) \rangle = \\ &= \langle P(D)(wH_1), \widetilde{w}u \rangle = \langle P(D)(wH_1), u \rangle = ((H_1, u)), \end{aligned}$$

wobei $\tilde{w} = \tilde{w}(t) \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\tilde{w}$ aufgefaßt als Element aus $C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ gleich 1 auf einer Umgebung von $\text{Tr } T_1$ und gleich 0 auf einer Umgebung von $\mathbb{R}^n$. $w \in D(\mathbb{R})$ sei 1, wo $\tilde{w} \neq 1$ ist, und 0 auf einer Umgebung von $\text{Tr } T_1$.

Jedes Dualraumelement läßt sich damit als Funktion aus $D_P(\mathbb{R}^n)$ darstellen, d.h. die durch $((\ , \))$ definierte Abbildung von $D_P(\mathbb{R}^n)$ nach $(\mathcal{E}_{t_P}(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathbb{R}^n) / \mathcal{E}_{t_P}(\mathbb{R}^{n+1}))'$ ist surjektiv. Wir zeigen nun, daß sie injektiv ist.

Sei $((f, u)) = 0$ für alle $u \in \mathcal{E}_P(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathbb{R}^n)$. Dies gilt dann speziell für $u = \check{E} * (\check{d}_x^{(a)} \otimes \check{d}^{(i)})$, also:

$$D_x^a D_t^i f(x, 0) = ((f, u)) = 0 \quad (\text{vgl. 1.8.a)).}$$

Da f reell-analytisch von t abhängt, folgt $f = 0$.

Der Bilinearform sieht man nun leicht an, daß die Topologie von $D_P(\mathbb{R}^n)$ stärker ist als die von $(\mathcal{E}_{t_P}(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathbb{R}^n) / \mathcal{E}_{t_P}(\mathbb{R}^{n+1}))'_b$.

Da beides (DS)-Räume sind, ist die Abbildung offen.

$$\begin{aligned} d) (D_P(\mathbb{R}^n))'_b &\overset{\sim}{\underset{\text{töp}}{=}} \overset{\sim}{\underset{\text{töp}}{=}} ((\mathcal{E}_{t_P}(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathbb{R}^n) / \mathcal{E}_{t_P}(\mathbb{R}^{n+1}))'_b)'_b \overset{\sim}{\underset{\text{töp}}{=}} \\ &\overset{\sim}{\underset{\text{töp}}{=}} \mathcal{E}_{t_P}(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathbb{R}^n) / \mathcal{E}_{t_P}(\mathbb{R}^{n+1}), \text{ da } \mathcal{E}_{t_P}(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathbb{R}^n) / \mathcal{E}_{t_P}(\mathbb{R}^{n+1}) \\ &\text{als (FS)-Raum reflexiv ist.} \end{aligned}$$

□

Mit 6.4. folgt nun das Hauptergebnis:

6.9. Satz: Q erfülle die Bedingung (2) für $m-1$.

$$\begin{aligned} \text{a) } &\mathcal{E}_{t_P}(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathbb{R}^n) / \mathcal{E}_{t_P}(\mathbb{R}^{n+1}) \text{ ist topologisch isomorph} \\ &\prod_{i=0}^{m-1} D_b^i(Q(D), k; \mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

b) Ist Q semielliptisch, so ist $\mathcal{E}_{\mathbb{P}}(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathbb{R}^n) / \mathcal{E}_{\mathbb{P}}(\mathbb{R}^{n+1})$
 topologisch isomorph zu $\prod_{i=0}^{m-1} D'_b(a^{kr_Q a}, \mathbb{R}^n)$.

Beweis: 6.4. und 6.8.

□

Die Randwerte von $P(D) = Q(D) + i(-i \frac{\partial}{\partial t})^m$ durchlaufen also für wachsendes m folgende Stufen:

Ist m kleiner als Grad Q , so läßt sich ein Randwert sinnvoll nur für elliptische Q definieren, und die entstehende Garbe ist welk. Ist $m = \text{Grad } Q$ und Q elliptisch, so erhalten wir als Randwerte die Hyperfunktionen, da die Nulllösungen von $P(D)$ in jede Richtung reell-analytisch sind. Für semielliptische Q sind die Nulllösungen von $P(D)$ zwingend in eine Richtung des $\mathbb{R}^n$ reell-analytisch, und wir erhalten ein Tensorprodukt von Hyperfunktionen und Ultradistributionen. Die Randwerte haben also in gewisse Richtungen den Charakter von Hyperfunktionen und in anderen von Ultradistributionen.

In 6.9. haben wir uns vollständig vom analytischen Fall gelöst. Die Grundräume $D_{\mathbb{P}}(\mathbb{R}^n)$ enthalten Funktionen mit beliebig kleinem Träger in x -Richtung. Der Randwertraum stellt genau gewisse Ultradistributionsklassen dar, wenn Q semielliptisch ist. Die Verschlechterung der Ableitungseigenschaften (Regularität) der Nulllösungen von $P(D)$ in Richtung des $\mathbb{R}^n$ bringt also (per Dualraumbildung mit der Köthe-Dualität) die Verkleinerung der Randwerträume mit sich. Je größer m wird, umso kleiner werden die durch die

Randwerte dargestellten Ultradistributionsräume.

Zu jeder nicht quasianalytischen Klasse a^{ra} , $r = (\frac{b_j}{q_j}) \in \mathbb{Q}^n$, $b_j > q_j$, läßt sich $Q = \sum_{j=1}^n x_j \frac{2^{q_j} b_j}{b_j} + it^{2b}$ wählen ($b = \text{kgV}(b_j)$); vgl. Kapitel II.). Die Randwerte von $P(D)$ stellen dann exakt das $2b$ -fache Produkt der Ultradistributionen der Klasse a^{ra} dar. $\square$

Der folgende Satz gibt eine weitere Interpretation von 6.9.

6.10. Satz: Sei Q semielliptisch.

a) $u \in \mathcal{E}_{t_P}(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathbb{R}^n)$ stellt genau dann das m -fache ^{kr_Q}a Produkt der Ultradistributionen T_i der Klasse a^{kr_Q} dar, wenn u sich auf $\mathbb{R}^{n+1}$ fortsetzen läßt zu $\bar{u}$ als Ultradistribution der Klasse $a^{kr_Q} 1^{cl}$ ($c > 1$) und $\bar{u}$ die Differentialgleichung

$$t_{P(D)} \bar{u} = \sum_{i=0}^{m-1} T_i \otimes \mathcal{D}_t^{(i)} \text{ erfüllt.} \quad (21)$$

b) Jede Funktion $u \in \mathcal{E}_{t_P}(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathbb{R}^n)$ läßt sich im oben genannten Sinne fortsetzen. Das Lösen der Differentialgleichung (21) definiert also einen topologischen Isomorphismus zwischen $\prod_{i=0}^{m-1} D_b'(a^{kr_Q} 1^{cl}, \mathbb{R}^n)$ und $\mathcal{E}_{t_P}(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathbb{R}^n) / \mathcal{E}_{t_P}(\mathbb{R}^{n+1})$.

Beweis: a) $\Leftarrow$ Sei $\bar{u}$ wie oben.

$$\begin{aligned} ((\bar{u}, f)) &= \langle \bar{u}, P(D)(wf) \rangle_{D'(a^{kr_Q} 1^{cl}, \mathbb{R}^n)} = \\ &= \langle t_{P(D)} \bar{u}, wf \rangle_{D'(a^{kr_Q} 1^{cl}, \mathbb{R}^n)} = \langle (T_i), \phi(f) \rangle = \langle t_{\phi(T_i)}, f \rangle. \end{aligned}$$

u stellt also (T_i) dar ($w \in \mathcal{D}(\mathcal{L}^{cl}, \mathbb{R})$).

" $\Rightarrow$ " u stelle (T_i) dar. Nach 4.7.b) ist die Gleichung

$${}^t\bar{P}(D){}^tP(D)\tilde{u} = \sum_{i=0}^{m-1} T_i \otimes \sigma_t^{(i)} \quad \text{im obigen Raume lösbar.}$$

${}^t\bar{P}(D)\tilde{u}$ gehört zu $\mathcal{E}_{\ell_P}(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathbb{R}^n)$ und löst die Gleichung (21).

${}^t\bar{P}(D)\tilde{u}$ stellt also (T_i) dar. Damit gehört $u - {}^t\bar{P}(D)\tilde{u}$ zu $\mathcal{E}_P(\mathbb{R}^{n+1})$ und hieraus folgt die Behauptung.

b) Dies folgt direkt aus 6.9. und 6.10.a).

□

Literatur:

- [1] G. Bengel: Das Weylsche Lemma in der Theorie der
Hyperfunktionen; Math. Zeit. 96, (1967), S. 373-392
- [2] G. Björk: Linear partial differential operators and
generalized distributions; Ark. Math. 6 (1966),
S. 351 - 407
- [3] C.C. Chou: La Transformation de Fourier Complexe
et L'Equation de Convolution; Lecture Notes 325,
Berlin/Heidelberg/New York 1973
- [4] R. Godement: Théorie des faisceaux: Paris 1964
- [5] A. Grothendieck: Produits tensoriels topologiques
et espaces nucléaires; Memoirs of the AMS 16 (1955)
- [6] L. Hörmander: Linear partial differential operators;
Grundlehren 116, Berlin/Heidelberg/New York 1969
- [7] L. Hörmander: Introduction to complex analysis in
several variables; Princeton 1966
- [8] H. Komatsu: Projektive and injektive limits of weakly
compact sequences of locally convex spaces;
J.Math.Soc. Japan 19 (1967), S. 366 - 383
- [9] H. Komatsu: Relative cohomology of sheaves of solu-
tions of differential equations; in: Hyper-
functions and pseudo-differential equations,
Lecture Notes 287, Berlin/Heidelberg/New York
1973, S. 192 - 261

- [10] B. Malgrange: Sur les systèmes différentiels à coefficients constants; Colloque international sur les équations aux dérivées partielles, Paris 1962, S. 113 - 122
- [11] A. Martineau: Distributions et valeurs au bord des fonctions holomorphes; Proceedings of the International Summer Course on the Theory of Distributions, Lisboa 1964, S. 196 - 326
- [12] V.P. Palamodov: Linear differential operators with constant coefficients; Grundlehren 168, Berlin/heidelberg/New York 1970
- [13] D.A. Raikov: Double closed-graph theorem for topological linear spaces; Sib.Math.J. (translated from Russian) 7, 2 (1966), S. 287 - 300
- [14] L. Schwartz: Théorie des Distributions I,II; Paris 1957, 1959
- [15] Séminaire Schwartz 1953/54: Produits tensoriels topologiques...; Fac.d.Sci., Paris 1954
- [16] P. Shapira: Théorie des Hyperfonctions; Lecture Notes 126, Berlin/Heidelberg/New York 1970
- [17] F. Trèves: Linear partial differential equations with constant coefficients; New York/London/Paris 1966
- [18] D. Vogt: Randverteilungen holomorpher Funktionen und die Topologie von D' ; Math.Ann.196(1972), S.281-292
- [19] Z. Zielezny/E. Newberger: The growth of hypoelliptic polynomials and Gevrey classes; Proc. of the AMS 39 (1973), S. 547 - 552

Lebenslauf:

Am 3.7.1952 wurde ich in Simmerath/Eifel als Sohn des Pfarrers Paul Langenbruch und seiner Ehefrau Auguste geb. de Haas geboren. Meine Staatsangehörigkeit ist deutsch.

Ich besuchte von 1959 bis 1963 die Volksschule in Monzingen und wechselte dann zum Staatlichen Neusprachlichen Gymnasium in Sobernheim. Nach 7 Jahren bestand ich dort am 2.6.1970 die Reifeprüfung.

Vom WS 1970/71 bis zum WS 1976/77 studierte ich an der Johannes Gutenberg-Universität in Mainz Mathematik (Nebenfach Physik). Im Oktober 1972 legte ich die Vordiplomprüfung ab und am 18.12.1974 bestand ich die Diplomprüfung. Die mündliche Prüfung zur Promotion fand am 3.12.1976 statt.

Vom 1.4.1976 bis 31.3.1977 war ich wissenschaftlicher Angestellter an der Johannes Gutenberg-Universität in Mainz. Seit dem 1.4.1977 bin ich wissenschaftlicher Assistent an der Westfälischen Wilhelms-Universität in Münster.

Seit dem 20.8.1976 bin ich verheiratet mit Brigitte Langenbruch geb. Hombach.

Meine jetzige Anschrift lautet:

Michael Langenbruch

Altenroxel 11

44 Münster-Roxel

